Simulado OBMEP 2017
Nível 3 – Ensino Médio

1. ALTERNATIVA D
O comprimento da mesa é $8 \times 22 = 176$ centímetros; logo, o palmo de Carolina mede $176 \div 11 = 16$ centímetros.

2. ALTERNATIVA C
Como ao multiplicar qualquer número por 0 o resultado é 0, não contribuindo assim para maximizar o resultado da expressão, devemos colocar sinais de adição dos dois lados do 0:

$$2\ \square\ 3\ \boxed{+}\ 0\ \boxed{+}\ 8\ \square\ 9\ \square\ 1$$

Entre multiplicar por 1 e somar 1, o maior resultado é obtido no segundo caso, logo devemos também colocar um sinal de adição antes do 1:

$$2\ \square\ 3\ \boxed{+}\ 0\ \boxed{+}\ 8\ \square\ 9\ \boxed{+}\ 1$$

Finalmente, 2×3 é maior que $2 + 3$ e 8×9 é maior que $8 + 9$, de modo que a expressão que fornece o maior valor é

$$2\ \boxed{\times}\ 3\ \boxed{+}\ 0\ \boxed{+}\ 8\ \boxed{\times}\ 9\ \boxed{+}\ 1$$

cujo valor $2 \times 3 + 0 + 8 \times 9 + 1 = 79$.

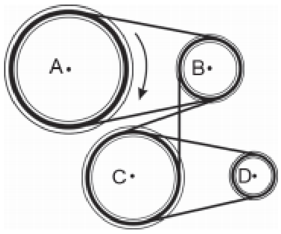
3. ALTERNATIVA A
Basta verificar que após oito giros sucessivos o quadrado menor retorna à sua posição inicial. Como $2012 = 8 \times 251 + 4$, após o $2012^{\text{º}}$ giro o quadrado cinza terá dado 251 voltas completas no quadrado maior e mais quatro giros, parando na posição que corresponde à alternativa A.

4. ALTERNATIVA D
Podemos organizar as informações numa tabela:

	mês	dia do mês	dia da semana
Andrea	agosto	16	segunda
Daniela	agosto	16	terça
Fernanda	setembro	17	terça
Patrícia	agosto	17	segunda
Tatiane	setembro	17	segunda

Se Andrea estivesse certa, então Fernanda não acertaria nenhuma das informações. Logo, não é ela que está certa, nem Fernanda (pelo mesmo motivo). Se Daniela estivesse certa, então Tatiane também nada acertaria. Logo Daniele e Tatiane não estão certas. Se Patrícia acertar tudo, as demais também acertarão alguma informação e, portanto, Patrícia é a única que está certa.

5. ALTERNATIVA D

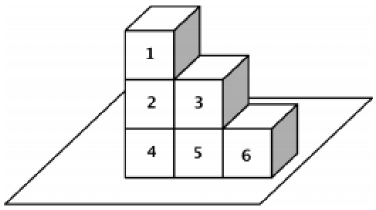


A figura mostra que os discos A e B giram no mesmo sentido, os discos B e C em sentidos opostos e os discos C e D no mesmo sentido. Assim, D gira no sentido antihorário. Lembramos que o perímetro p de um círculo de raio r é dado por $p = 2\pi r$.
Como o raio do disco A é quatro vezes o de D, segue que o perímetro de A também é quatro vezes o perímetro de D. Logo D dá quatro voltas para cada volta de A.
Usamos no argumento acima o fato intuitivo de que os raios dos discos B e C são irrelevantes para a resolução desta questão; é interessante mostrar isto rigorosamente. No caso geral, podemos supor que os raios de A, B, C e D são a, b, c e d, respectivamente.
Se n_a, n_b, n_c e n_d são os números de voltas dados pelos discos A, B, C e D, respectivamente, então $n_a \cdot 2\pi a = n_b \cdot 2\pi b = n_c \cdot 2\pi c = n_d \cdot 2\pi d$.

$$n_a \cdot 2\pi a = n_d \cdot 2\pi d \Leftrightarrow \frac{n_d}{n_a} = \frac{a}{d}.$$

Se $n_a = 1$ então $n_d = \frac{8}{2} = 4$.

6. ALTERNATIVA A



A soma de todas as faces de um cubo é $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. A soma das faces visíveis é então igual a $6 \times 21 = 126 - (a\ soma\ das\ faces\ escondidas)$. Logo, para que a soma das faces visíveis seja máxima, devemos posicionar os cubos de modo que a soma dos números das faces escondidas seja mínima. Vamos minimizar essa soma considerando um cubo de cada vez, de acordo com a numeração da figura ao lado.

- Cubo 1: há apenas uma face escondida, que deve ser a de número 1.
- Cubos 2 e 4: em cada um há três faces escondidas. Dessas faces, duas são opostas e somam 7; a terceira face deve ser a de número 1. A soma dessas faces é $2 \times (1 + 7) = 16$.
- Cubos3 e 6: em cada um há duas faces vizinhas escondidas, que devem ser as de número 1 e 2 (como esses números não somam 7, as faces correspondentes não são opostas, logo são adjacentes). Essas faces somam .
- Cubo 5: há dois pares de faces opostas escondidas, que somam 14.

Logo, a soma máxima possível é $126 - (1 + 16 + 6 + 14) = 126 - 37 = 89$.

7. ALTERNATIVA D

Cada figura é formada por 3 cópias da figura anterior, posicionadas de modo a colocar em contato apenas dois pares de quadradinhos das cópias das figuras. Em consequência, o comprimento do contorno da nova figura é igual a 3 vezes o comprimento do contorno da anterior, menos $4\ cm$ (correspondentes aos lados em contato). A tabela abaixo dá o comprimento do contorno das sucessivas figuras.

Figura	Contorno (cm)
1	4
2	$3 \times 4 - 4 = 8$
3	$3 \times 8 - 4 = 20$
4	$3 \times 20 - 4 = 56$
5	$3 \times 56 - 4 = 164$
6	$3 \times 164 - 4 = 488$

Portanto, o contorno da Figura 6 mede 488 cm.

8. ALTERNATIVA A

Escrevendo 24 como produto de inteiros positivos de todas as maneiras possíveis, podemos investigar todas as possibilidades para a e b em $a * b = (a+1) \times (b-1) = 24$ e testá-las em $b * a = (b+1) \times (a-1) = 30$ para achar os possíveis valores de a e b. Vamos lá:

$24 =$	a	b	$(b+1)\times(a-1)$
1×24	0	25	não considerar pois $a>0$
2×12	1	13	0
3×8	2	9	10
4×6	3	7	16
6×4	5	5	25
8×3	7	4	**30**
12×2	11	3	33
24×1	23	2	46

Logo $a = 7$ e $b = 4$, donde $a + b = 11$.

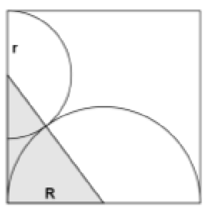
De modo mais algébrico, podemos resolver este problema como segue. Temos $a * b = (a+1)(b-1) = ab - a + b - 1 = 24$ e $b * a = (b+1)(a-1) = ab + a - b - 1 = 30$. Somando estas duas expressões, obtemos $2ab - 2 = 54$ e segue que $ab = 28$. De modo análogo ao anterior, geramos as possibilidades $(1{,}28)$, $(2{,}14)$, $(4{,}7)$, $(7{,}4)$, $(14{,}2)$ e $(28{,}1)$ para (a, b) e verificamos que apenas $a = 7$ e $b = 4$ satisfazem $a * b = 24$ e $b * a = 30$.

Alternativamente, notamos que subtraindo a $ab - a + b - 1 = 24$ de $ab + a - b - 1 = 30$ obtemos $2a - 2b = 6$, ou seja, $a - b = 3$. Logo $a = b + 3$ e substituindo em $ab = 28$ temos $b^2 - 3b - 28 = 0$. Esta equação tem raízes $b = 4$ e $b = -7$, como só nos interessa a raiz positiva, temos $b = 4$ e então $a = 7$.

9. ALTERNATIVA E

A expressão dada pode ser escrita como $\sqrt{n \cdot 17^2} = 3 \cdot 17^2$, sendo n o número de parcelas 17^2 que aparecem dentro do radical. Elevando os dois lados dessa expressão ao quadrado, temos $n \cdot 17^2 = 9 \cdot 17^4$, donde $n = 9 \cdot 17^2 = 2601$.

10. ALTERNATIVA E



Sejam R e r os raios dos semicírculos maior e menor, respectivamente; o lado do quadrado tem então medida $2R = 36$, ou seja, $R = 18$. Como os centros dos semicírculos e o ponto de tangência estão alinhados, o triângulo destacado na figura é um triângulo retângulo de catetos R e $2R - r$ e hipotenusa $R + r$. O teorema de Pitágoras nos dá $(R+r)^2 = R^2 + (2R-r)^2$. Simplificando, obtemos $6Rr = 4R^2$ e segue que $r = \frac{2}{3}R = \frac{2}{3} \times 18 = 12\ cm$.

11. ALTERNATIVA A

Notamos primeiro que a soma dos números de 1 a 25 é $\frac{25\times(25+1)}{2} = 325$; a soma dos números em uma linha, coluna ou diagonal [e então $\frac{325}{5} = 65$. As casas brancas do tabuleiro consistem de uma linha, de uma coluna e das duas diagonais, todas se cruzando na casa central. Denotando por x o número da casa central e lembrando que a soma dos números das casas cinzentas é 104, temos $4 \cdot 65 - 3x = 325 - 104$ e segue que $x = 13$.

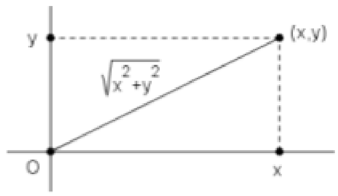
12. ALTERNATIVA D

Como $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, tem-se $n \geq 13$. Por outro lado $13! = 13 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{10}$. E, portanto $\frac{n!}{13!} = \frac{2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}{13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{10}} = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 14 \cdot 15 \cdot 16$.

Logo, $n! = 13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 16!$, ou seja, $n = 16$.

13. ALTERNATIVA C

Coloquemos a origem de coordenadas no ponto O. O teorema de Pitágoras mostra que a distância de um ponto (x, y) à origem de coordenadas é $\sqrt{x^2 + y^2}$; logo, para que (x, y) esteja na região delimitada pelas circunferências de raios 4 e 5, devemos ter $16 = 4^2 \leq x^2 + y^2 \leq 5^2 = 25$. Observamos também que se (x, y) está nesta região, o mesmo se pode dizer todos os pontos da forma $(\pm x, \pm y)$ e $(\pm y, \pm x)$. Assim, podemos restringir nossa análise a pontos (x, y) com $x, y \geq 0$, e $x \leq y$.



Como $16 \leq x^2 + y^2 \leq 25$, devemos ter $0 \leq x, y \leq 5$, e estamos interessados apenas em valores inteiros de x e y. Procedemos agora por listagem direta, e obtemos a tabela a seguir.

pontos (x,y) **com** $x,y \geq 0$, $x \leq y$ **e** $16 \leq x^2+y^2 \leq 25$	**pontos da forma** $(\pm x, \pm y)$ **e** $(\pm y, \pm x)$	**número de pontos**
(0,4)	$(0,\pm 4)$, $(\pm 4,0)$	4
(0,5)	$(0,\pm 5)$, $(\pm 5,0)$	4
(1,4)	$(\pm 1,\pm 4)$, $(\pm 4,\pm 1)$	8
(2,4)	$(\pm 2 \pm 4)$, $(\pm 4,\pm 2)$	8
(3,3)	$(\pm 3,\pm 3)$	4
(3,4)	$(\pm 3,\pm 4)$, $(\pm 4,\pm 3)$	8
	Total	**36**

14. ALTERNATIVA A

Cada uma das três pessoas, em princípio, pode beber água ou suco, logo há $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades para considerar, conforme a tabela.

	Ari	**Bruna**	**Carlos**
1	água	água	água
2	suco	água	água
3	água	suco	água
4	suco	suco	água
5	água	água	suco
6	suco	água	suco
7	água	suco	suco
8	suco	suco	suco

Devemos agora analisar as condições do problema para decidir qual das possibilidades é a correta. A primeira condição (se Ari pede a mesma bebida que Carlos, então Bruna pede água) elimina as possibilidades 3 e 8. A segunda condição (se Ari pede uma bebida diferente da de Bruna, então Carlos pede suco) elimina a possibilidade 2. A terceira condição (se Bruna pede uma bebida diferente da de Carlos, então Ari pede água) elimina as possibilidades 4 e 6. Até o momento, restam as possibilidades 1, 5 e 7.

	Ari	**Bruna**	**Carlos**
1	água	água	água
5	água	água	suco
7	água	suco	suco

e como apenas um deles pede sempre a mesma bebida, chegamos a Ari, que sempre pede água.

15. ALTERNATIVA D

Vamos representar o número de salas e o número de alunos da Escola Municipal de Pirajuba, no ano de 2011, respectivamente, por s e por a (observe que o valor de a é o mesmo para os anos de 2011, 2012 e 2013). Como o número de alunos por sala nos anos de 2011 e 2012 é o mesmo, temos $\frac{a}{s+5} = \frac{a}{s} - 6$ ou, equivalentemente, $6s^2 + 30s = 5a$. Analogamente, como número de alunos por sala nos anos de 2012 e 2013 também é o mesmo, temos $\frac{a}{s+10} = \frac{a}{s+5} - 5$, ou seja, $s^2 + 15s + 50 = a$. Logo $6s^2 + 30s = 5(s^2 + 15s + 50)$ e concluímos que o número s de salas satisfaza equação $s^2 - 45s - 250 = 0$ cujas soluções são $s = 50$ e $s = -5$. Como $s > 0$, temos $s = 50$. Logo, o número total de alunos da escola é $a = 50^2 + 15 \times 50 + 50 = 3300$.

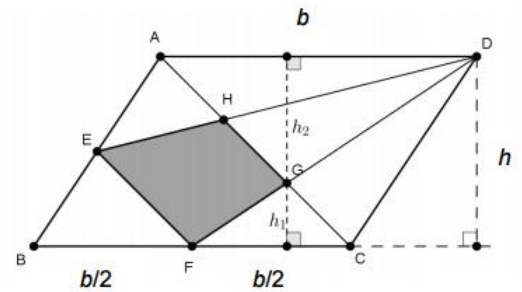
Outra solução envolve considerar a média $m = \frac{a}{s}$ de alunos por sala em 2011: observamos que $a = ms$. Da informação do enunciado sobre 2012 tiramos $m - 6 = \frac{a}{s+5}$, ou seja, $a = (m-6)(s+5)$; a informação sobre 2013 é $m - 11 = \frac{a}{s+10}$, ou seja, $a = (m-11)(s+10)$. Temos então as equações $ms = (m-6)(s+5)$ e $ms = (m-11)(s+10)$, que nos dão o sistema linear

$$\begin{cases} 5m - 6s = 30 \\ 10m - 11s = 110 \end{cases}$$

cuja solução é $s = 50$ e $m = 63$. O número de alunos é então $a = ms = 63 \times 50 = 3300$.

16. ALTERNATIVA B

Denotaremos por **A**F a área de uma figura F e por $\sim$ a relação de semelhança de triângulos. Sejam b a medida da base do paralelogramo e h sua altura. Então:



$$\boldsymbol{A}ABC = 24\ cm^2 \Rightarrow b \cdot h = 24\ cm^2$$

$$\Delta GCF \sim \Delta GDA \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{b/2}{b} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow h_2 = 2h_1 \Rightarrow 3h_1 = h \Rightarrow h_1 = \frac{h}{3}$$

Portanto, $\boldsymbol{A}GFC = \frac{\frac{b}{2}\frac{h}{3}}{2} = \frac{b \cdot h}{12} = \frac{24}{12} = 2\ cm^2$.

Da mesma forma, também podemos concluir que $\boldsymbol{A}AHE = 2\ cm^2$.

Vamos calcular agora a área $\boldsymbol{A}BEF$, lembrando que triângulos semelhantes possuem áreas relacionadas com o quadrado da constante de proporcionalidade:

$$\Delta EBF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{\boldsymbol{A}EBF}{\boldsymbol{A}ABC} = \left(\frac{b/2}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boldsymbol{A}EBF = \frac{\boldsymbol{A}ABC}{4} = \frac{12}{4} - 3\ cm^2\ .$$

Agora vamos calcular a área do quadrilátero $EFGH$ por diferença:

$$\boldsymbol{A}EFGH = \boldsymbol{A}ABC - \boldsymbol{A}GFC - \boldsymbol{A}AEH - \boldsymbol{A}EBF = 12 - 2 - 2 - 3 = 5\ cm^2\ .$$

Outra solução: $\boldsymbol{A}DFC = \frac{1}{4} \cdot \boldsymbol{A}ABCD = 6$, $\boldsymbol{A}DEA = \frac{1}{4} \cdot \boldsymbol{A}ABCD = 6$, $\boldsymbol{A}BFE = \frac{1}{8} \cdot \boldsymbol{A}ABCD = 3$.

Daí, $\boldsymbol{A}DEF = 24 - 6 - 6 - 3 = 9$. Temos que $\Delta DEF \sim \Delta DHG$ e a razão entre suas alturas é

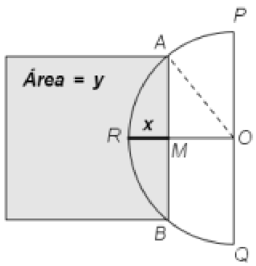
$$\frac{3BD/4}{BD/2} = \frac{3}{2}$$

Portanto, $\boldsymbol{A}DHG = \frac{4}{9}\ \boldsymbol{A}DEF = 4$. A área procurada é a diferença $9 - 4 = 5\ cm^2$.

17. ALTERNATIVA D
Antes de chegar ao centro, a aranha tem as seguintes escolhas em cada vértice de um pentágono:
- ir direto para o próximo nível, sem passar pelas arestas do pentágono em que se encontra;
- caminhar no sentido horário pelas arestas do pentágono em que se encontra por no máximo 5 segmentos, passando então para o próximo nível, e
- caminhar no sentido anti-horário pelas arestas do pentágono em que se encontra por no máximo 5 segmentos, passando então para o próximo nível.

Assim, em cada pentágono a aranha tem 11 escolhas para passar para o próximo nível; como são três os pentágonos, a aranha tem um total de $11 \times 11 \times 11 = 11^3$ caminhos possíveis para chegar ao centro da teia

18. ALTERNATIVA C
Como o diâmetro do círculo é 2, seu raio é 1. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo OMA, obtemos $AM^2 = 1^2 - (1-x)^2 = 2x - x^2$. Esta é a área de um quadrado de lado $AM = \frac{AB}{2}$: a área do quadrado de lado AB é então $y = 4(2x - x^2) = 8x - 4x^2$. Notamos que como x varia em OR, temos $0 \leq x \leq 1$; para $x = 0$ temos $y = 0$ e para $x = 1$ temos $y = 4$. O gráfico de $y = 8x - 4x^2$ é uma parábola com concavidade para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo; este gráfico está representado na alternativa C.



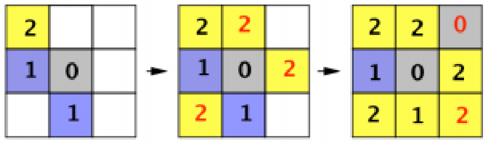
19. ALTERNATIVA D
Numeramos as quatro bolinhas de 1 a 4, do menor para o maior valor. Há $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ordens possíveis para a retirada das bolinhas, todas igualmente prováveis. Dessas retiradas, Pedro fica com o prêmio de maior valor nos seguintes casos:
1. a bolinha 4 sai na 3ª retirada; neste caso, seu número é necessariamente maior que os das duas primeiras;
2. a bolinha 4 sai na 4ª retirada, desde que a bolinha 3 saia em uma das duas primeiras retiradas (caso contrário, ou seja, se ela sair na 3ª retirada, Pedro ficará com ela, por seu número ser maior que o das duas primeiras).

O número de possibilidades para o primeiro caso é $3 \times 2 \times 1 = 6$. Para o segundo caso, há 2 possibilidades para a posição em que sai a bolinha 3 (1ª ou 2ª), 2 possibilidades para a bolinha que sai na 3ª posição e 1 possibilidade para a bolinha que sai na 4ª retirada, num total de $2 \times 2 \times 1 = 4$ possibilidades. Logo, o número de casos favoráveis é $6 + 4 = 10$ e a probabilidade de que Pedro tire o prêmio de maior valor é $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

Outra solução é como segue. Pedro tira o prêmio máximo em duas situações: quando a bolinha 4 sai na 3ª posição ou quando ela sai na 4ª posição e a bolinha 3 sai em uma das duas primeiras. A probabilidade do primeiro evento é $\frac{1}{4}$ e a do segundo é $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$. Logo, a probabilidade de ele tirar o prêmio máximo é $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.

20. ALTERNATIVA E
Observamos inicialmente que em qualquer quadradinho, quando o número de trocas de cor é um múltiplo de 3, voltamos à cor original. Assim, para saber, em qualquer momento, qual a cor de um quadradinho, basta conhecer o resto na divisão por 3 do número de trocas de cor. Para isso, identificamos cada quadradinho cinza com o número 0 (o que significa que o número de trocas de cor tem resto 0 na divisão por 3, ou seja, a cor pode não ter sido trocada ou foi trocada em um número múltiplo de 3); identificamos um quadradinho azul com o número 1 (o que significa que o número de trocas de cor tem resto 1 na divisão por 3); e, finalmente, identificamos um quadradinho amarelo com o número 2 (o número de trocas de cor tem resto 2 na divisão por 3).

Observamos agora que, sempre que trocamos a cor de um quadradinho da primeira ou da terceira coluna, trocamos também a cor do quadradinho a seu lado na coluna do meio. Portanto, a soma do número de trocas de cor dos quadradinhos de uma mesma linha, que estão na primeira e terceira colunas, é igual ao número de trocas de cor do quadradinho da coluna do meio que está nesta mesma linha. Em particular, o resto da divisão do número de trocas de um quadradinho da coluna do meio por 3 é igual ao resto da divisão por 3 da soma dos restos das divisões por 3 do número de trocas de cores dos quadradinhos vizinhos que estão na primeira e na terceira coluna da mesma linha. Comentário análogo vale para os quadradinhos da linha do meio. Essas observações nos permitem reconstruir o quadriculado completo, conforme a figura abaixo.



O problema não acaba aqui, pois ainda não mostramos que esse quadriculado pode, de fato, ser obtido por uma sequência de Adão. Que isso de fato acontece pode ser visto abaixo.