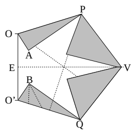
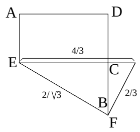
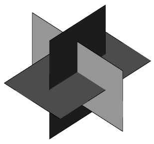
 





# Explorando Geometria com *Origami*

Eduardo Cavacami
Yolanda Kioko Saito Furuya

Texto já revisado pela nova ortografia.

# Sumário

# Introdução

As primeiras aplicações da Geometria de que se tem notícia apareceram em problemas relacionados com divisão de suas terras e na Astronomia. Desde então o uso da Geometria é uma constante na vida do homem e hoje o seu estudo é inserido no ensino da Matemática desde os primeiros anos escolares. No entanto, é notório a dificuldade no aprendizado e a falta de motivação no estudo da Geometria.

A aplicação de *Origami* no ensino da Geometria pode auxiliar no desenvolvimento cognitivo, trazendo assim uma melhor aprendizagem e compreensão da Matemática através da manipulação de um simples pedaço de papel.

O *Origami*, de origem desconhecida, tem etmologia japonesa e significa dobrar (*ori*) papel (*kami*). No Brasil, utiliza-se também a palavra *dobradura*, mas o termo *Origami* é mundialmente reconhecido e utilizado.

Este trabalho trata do relacionamento entre a Geometria e o *Origami*, através da implementação de dobraduras para apresentação de resultados da Geometria e o uso da Geometria para justificar as construções. Com isto estamos lidando com mais uma metodologia de ensino e estudo da Geometria Elementar, com o uso de uma técnica milenar, concreta e divertida, além de acessível a qualquer pessoa.

Inicialmente apresentamos alguns problemas clássicos da Geometria Euclidiana, incluindo a resolução com *Origami* de dois problemas não solúveis com régua e compasso: a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo. Depois passamos aos poliedros de Platão, construídos através de módulos de *Origami* que se encaixam uns aos outros, formando as faces.

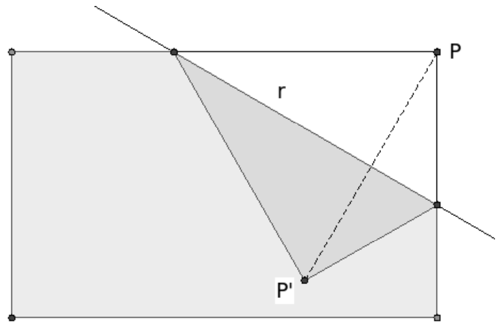
Este texto foi baseado principalmente no trabalho de Hisashi Abe, do seu livro *Sugoizô*[1] *Origami*, de 2003 (em japonês, [1]). Hisashi Abe, da Universidade de Hokaido, é o autor da construção da trissecção do ângulo apresentada neste texto.

Para um melhor aproveitamento das informações obtidas neste trabalho, espera-se um conhecimento básico em Geometria Elementar.

## As construções e os Axiomas de Huzita-Hatori

Apesar de existirem técnicas de origami dobrando linhas curvas[2] além das retas, este trabalho se restringirá às dobras em linha reta. Cada dobra efetuada gera uma linha reta e os pontos de um dos semiplanos são refletidos no outro semiplano, ou seja, se $r$ é a linha de dobra, e $P$ é um ponto da folha a ser dobrada, $P$ é levado no seu simétrico $P'$ em relação a $r$. Ou seja, a linha de dobra $r$ é a mediatriz de cada par $P, P'$, onde $P'$ é o refletido de $P$ (onde $P$ é levado).

[1] Sugoizô = Impressionante
[2] Como, por exemplo, na construção da *Rosa de Kawasaki*.



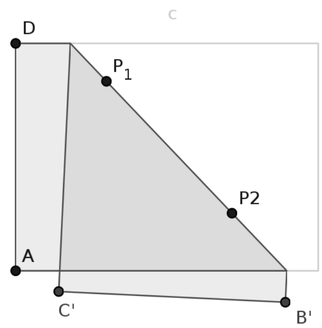

Além disso, a linha de dobra $r$ também é a bissetriz de cada ângulo $P\widehat{V}P'$ formado por um raio $VP$ com origem $V$ em $r$ e seu raio refletido $VP'$, onde o raio é levado.

Com isso, vê-se que mediatrizes e bissetrizes são construções elementares com *Origami*, assim como perpendiculares e paralelas.

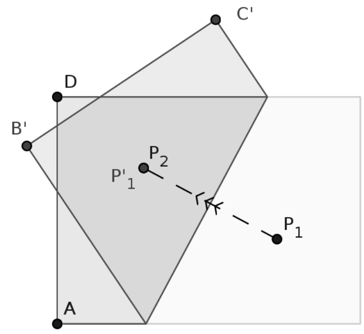
Construções elementares não serão detalhadas todas as vezes que forem utilizadas, para não desviar a atenção da construção central.

Todas as construções utilizadas no texto são consequências dos Axiomas da Geometria do Origami, conhecidos como os Axiomas de Huzita (ou Huzita-Hatori, ou Huzita-Justin), que podem ser obtidos no seguinte endereço eletrônico, de Robert Lang: `http://www.langorigami.com/science`, e dadas a seguir:

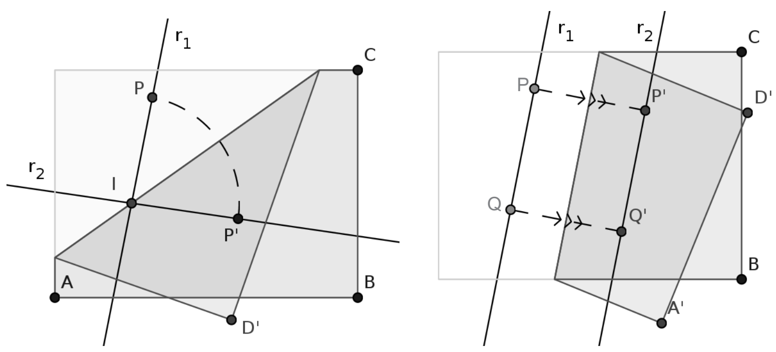
1. Dados dois pontos distintos $P_1$ e $P_2$, existe apenas uma dobra que passa por eles.



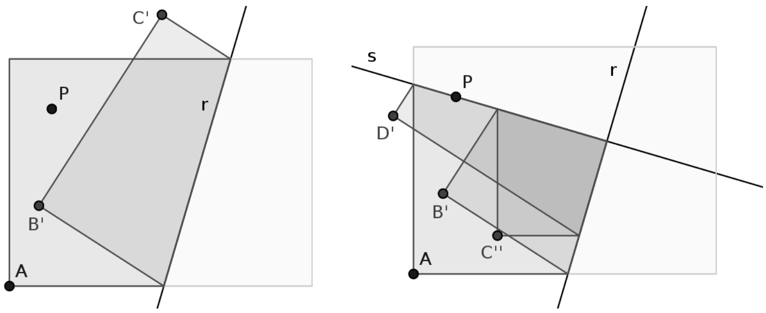

2. Dados dois pontos distintos $P_1$ e $P_2$, existe apenas uma dobra que coloca $P_1$ sobre $P_2$.



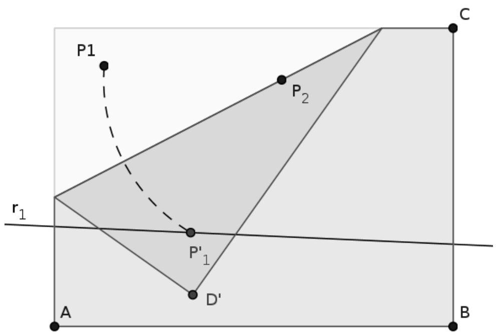

3. Dadas as retas $r_1$ e $r_2$, existe uma dobra que coloca $r_1$ sobre $r_2$.



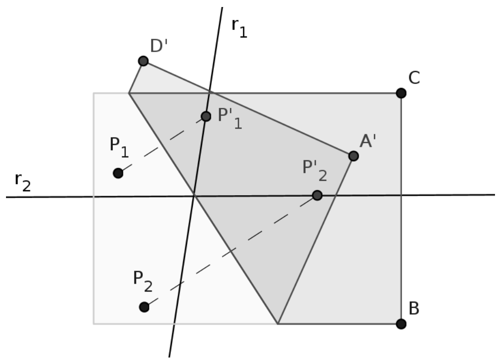
4. Dados um ponto $P$ e uma reta $r$, existe uma dobra única que é perpendicular a $r$ e que passa por $P$.



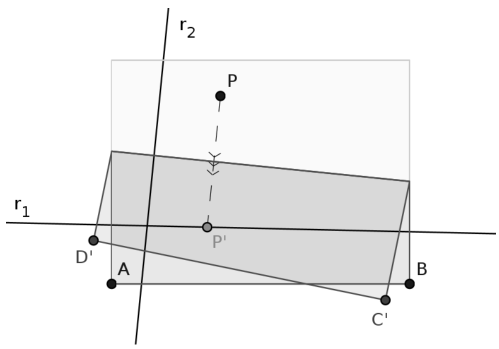

5. Dados dois pontos $P_1$ e $P_2$ e uma reta $r_1$, existe uma dobra que coloca $P_1$ sobre $r_1$ e que passa por $P_2$.



6. Dados dois pontos $P_1$ e $P_2$ e duas retas $r_1$ e $r_2$, existe uma dobra que leva simultaneamente $P_1$ sobre $r_1$ e $P_2$ sobre $r_2$.




7. Dados um ponto $P$ e duas retas $r_1$ e $r_2$, existe uma dobra que coloca $P_1$ sobre $r_1$ e que é perpendicular a $r_2$.




Nesta axiomática, o papel tem o tamanho suficientemente grande para conter todas as construções necessárias (suponha-o ilimitado). Além disso, por “existe uma dobra” entende-se que se a solução geométrica existir, então pode ser realizada através de uma dobra.

Por exemplo, a quantidade de soluções do Axioma 5 pode ser 0, 1 ou 2, dependendo da posição dos pontos e da reta, pois o problema é equivalente a encontrar a intersecção da reta $r_1$ com a circunferência de centro $P_2$ passando por $P_1$.

Não há garantia de independência entre os axiomas. Mas pode-se garantir que o sexto axioma (de Humiaki Huzita) não é consequência dos cinco primeiros, pois os cinco primeiros geram somente construções possíveis com régua e compasso e, com o sexto axioma, podemos obter resultados não construtíveis com régua e compasso como veremos adiante.

O sétimo axioma, acrescentado por Koshiro Hatori, em 2001, e supostamente independente dos cinco primeiros, deixa uma dúvida:

Observe na construção geométrica do Axioma 7, que o ponto $P$ é levado em $P' \in r_1$. Ora $PP'$ deve ser paralelo a $r_2$ para que a dobra seja perpendicular a $r_2$. Assim, efetuando os seguintes passos:

- *Dobre perpendicularmente a $r_2$ por $P$ obtendo como vinco a reta $s_1$ (Axioma 4).*
- *Dobre perpendicularmente a $s_1$ por $P$ obtendo $s_2$ (Axioma 4). Chame o ponto em $r_1 \cap s_2$ de $P'$.*
- *Dobre levando o ponto $P$ a $P'$ (Axioma 2), obtendo a reta $\ell$.*

Temos que a reta $\ell$ é a mediatriz de $PP'$ e, portanto, é perpendicular a $r_2 \parallel PP'$. Assim, a construção do Axioma 7 é consequência dos axiomas 4 e 2. Ou seja, o Axioma 7 decorre dos cinco primeiros axiomas de Huzita. Pergunta-se: existe algum “furo” nesta argumentação? O fato é que a dobra do Axioma 7 pode ser construída com um único movimento, o de deslizar um ponto $Q$ de $r_2$, mais distante que $P$ de $r_1$, sobre $r_2$ até que $P$ encontre $r_1$.

Um estudo mais avançado, de Robert J. Lang, sobre estes axiomas e construções geométricas com *Origami* pode ser obtido gratuitamente em: `http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf` (em inglês). Nele é demonstrado inclusive a completude do conjunto de axiomas, isto é, que não há mais axiomas a se acrescentar. E tal estudo é feito com o envolvimento de outra grande área da Matemática: a *Álgebra*.

# Capítulo 1

# Secções de Segmentos

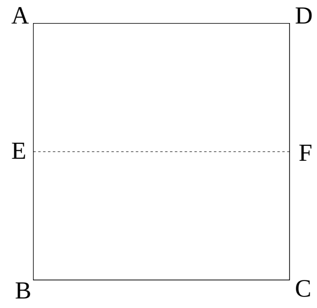
Como podemos facilmente determinar o ponto médio de um segmento através do *Origami*, podemos também dividir um segmento em $2^n$ partes, com $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Com régua e compasso, os gregos dividiam segmentos em $n$ partes. Veremos agora que com o *Origami* também é possível essa secção.

A secção áurea do segmento será trabalhada em momento oportuno, na construção de pentágonos.

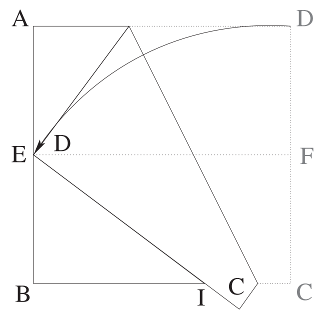
## 1.1 Construção de $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ a partir do Quadrado

Para se obter uma trissecção de segmento a partir de um quadrado, procedemos da seguinte maneira:

*Seja dado um quadrado $ABCD$. Suponha-o de lado igual a 1. Encontre os pontos médios $E$ e $F$ dos lados $AB$ e $CD$, respectivamente.*



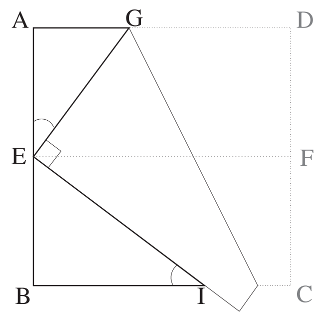

*Leve o vértice $D$ ao ponto $E$.*
O novo segmento $CD$ determina sobre o antigo $BC$ um ponto $I$. Temos que $\overline{IC}$, depois de aberto, equivale a $\dfrac{1}{3}$ do lado do quadrado $ABCD$.




A demonstração segue por semelhança de triângulos:

Os ângulos $A\widehat{E}G$ e $B\widehat{E}I$ são complementares, pois $G\widehat{E}I$ é reto por ser o refletido de $G\widehat{D}C$ que é reto.

Os triângulos $\triangle GAE$ e $\triangle EBI$ são retângulos. Como $A\widehat{E}G$ é complementar de $B\widehat{E}I$, então $A\widehat{E}G$ é congruente à $B\widehat{I}E$. Como os triângulos são retângulos e possuem um dos ângulos congruentes, eles são semelhantes.



Denominaremos agora por $x$ e $y$ os segmentos $AG$ e $BI$, respectivamente. Como $G$ é um ponto entre $A$ e $D$, $\overline{GD} = \overline{GE} = 1 - x$. Temos também que $\overline{AE} = \overline{EB} = \frac{1}{2}$.

Por Pitágoras, temos no triângulo $\triangle GAE$:

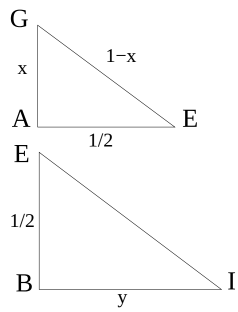
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2 = (1-x)^2 \Longrightarrow \frac{1}{4} + x^2 = 1 - 2x + x^2 \Longrightarrow x = \frac{3}{8}.$$

Pela semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = \frac{y}{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \frac{3}{8} \cdot y = \frac{1}{4} \Longrightarrow y = \frac{2}{3}.$$

Logo,

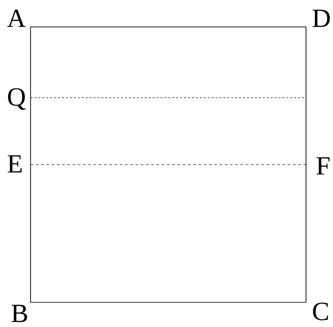
$$\overline{IC} = 1 - y = \frac{1}{3}.$$




No *Origami* também é possível dividir um segmento em cinco partes. Vejamos:

*Comece com um quadrado $ABCD$ de lado 1.*
*Encontre o ponto médio $E$ de $AB$.*
*Encontre, então, o ponto médio $Q$ entre $A$ e $E$.*
*Temos que $\overline{AQ} = \frac{1}{4}$, donde*

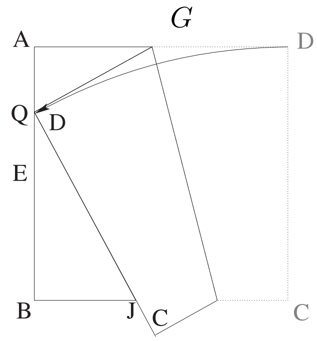
$$4 \cdot \overline{AQ} = 2 \cdot \overline{AE} = 2 \cdot \overline{EB} = \overline{AB}.$$



*Leve o vértice $D$ ao ponto $Q$, determinando $J$ em $BC$.*

Verifica-se, assim como no caso da trissecção do segmento, dois triângulos semelhantes, $\triangle AGQ$ e $\triangle BQJ$, pelos mesmos motivos do outro caso.

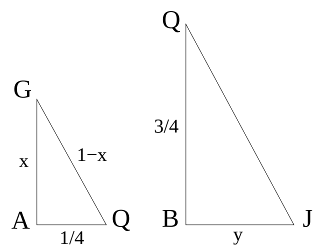
*Temos que* $\dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{BJ}$.




De fato, nos triângulos semelhantes,

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BJ}} = \frac{\overline{GQ}}{\overline{DJ}}.$$

Sejam $x = \overline{AQ}$ e $y = \overline{BJ}$.




Temos por Pitágoras que:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + x^2 = (1-x)^2 \Longrightarrow \frac{1}{16} + x^2 = 1 - 2x + x^2 \Longrightarrow x = \frac{15}{32}.$$

Por semelhança de triângulos temos:

$$\frac{\frac{15}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{y} \Rightarrow \frac{15}{32}y = \frac{3}{16} \Rightarrow y = \frac{2}{5}.$$

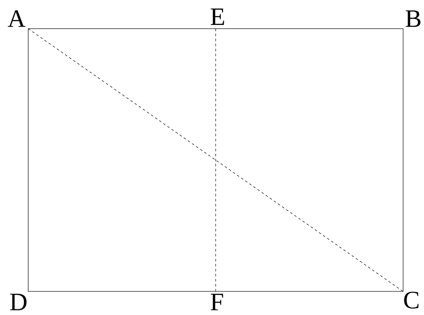
Obtido $\dfrac{2}{5}$ do segmento, basta dividir por 2 para conseguir $\dfrac{1}{5}$.

## 1.2 Construção de $\dfrac{1}{n}$ a partir do Retângulo

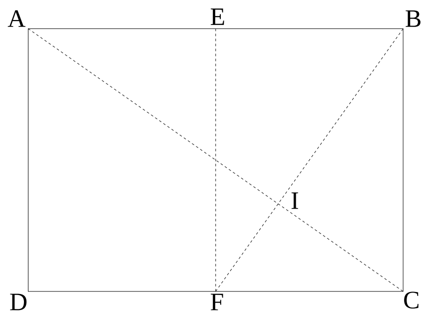
Existe uma forma mais generalizada de se dividir por $n$ partes, não sendo necessário o papel ser quadrado. Podemos começar com qualquer papel retangular.

Vamos refazer a divisão do segmento no caso $n = 3$ e $n = 5$.

*Seja dado um papel retangular qualquer $ABCD$. Dobre uma das diagonais e depois ao meio pelo lado maior, determinando os pontos $E$ e $F$, pontos médios dos respectivos segmentos $AB$ e $DC$.*




*No retângulo $EBCF$ que representa a metade do retângulo $ABCD$, dobre sua diagonal $BF$, encontrando o ponto $I$, intersecção da diagonal maior com a menor.*

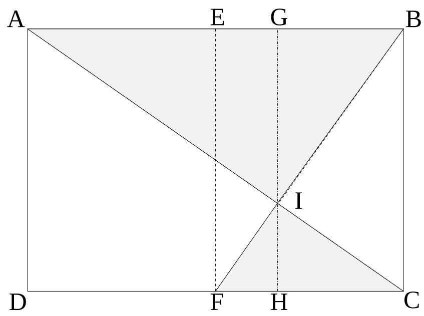



Os triângulos $\triangle ABI$ e $\triangle CFI$ são semelhantes, pois os ângulos do vértice em comum são congruentes, opostos pelo vértice e os outros ângulos são alternos internos.

Temos então que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{FC}} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow \dfrac{\overline{AI}}{\overline{IC}} = \dfrac{2}{1}$ e, portanto, a diagonal $AC$ está divida em três partes iguais.

*Dobre uma perpendicular a $AB$, passando pelo ponto $I$ e obtenha o ponto $G \in AB$.*

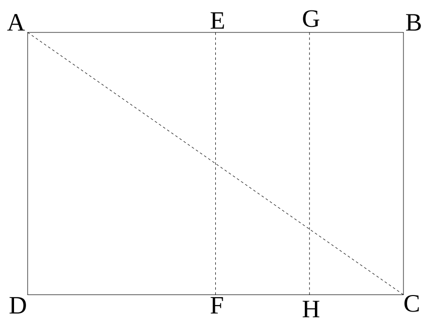
$$\overline{GB} = \frac{1}{3}\overline{AB}$$



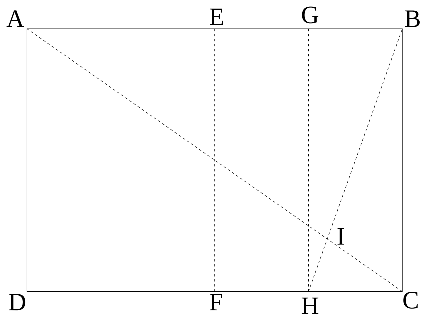

A última afirmação segue do Teorema de Tales, já que $IG$ e $CB$ são paralelos.

O método anterior pode ser aplicado para se obter $\dfrac{1}{5}$ do segmento.

*Pegue um papel retangular qualquer $ABCD$. Determine $E$ e $F$, pontos médios de $AB$ e $DC$. Determine também $G$ e $H$, pontos médios de $EB$ e $FC$.*

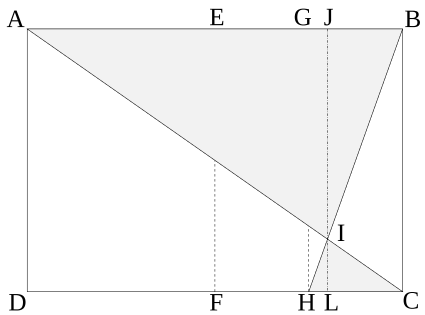


*Encontre $BH$, diagonal do retângulo $GBCH$. Chame de $I$ a intersecção de $AC$ e $BH$.*




*Dobre $JL$, perpendicular a $AB$, passando por $I$.* Verifica-se que $\overline{JB}$ é $\frac{1}{5}$ de $\overline{AB}$, pois

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{IC}} = \frac{4}{1}.$$




$\overline{JB}$ é igual a $\frac{1}{5}$ de $\overline{AB}$.

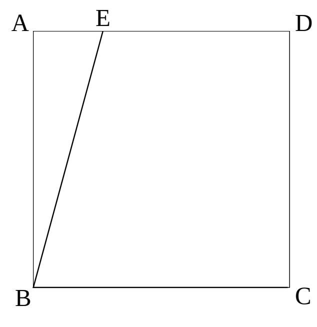
Com esse último método, podemos dividir qualquer segmento em $n$ partes, com $n \in \mathbb{N}$, por indução: tendo o segmento $JL$ da divisão em $n-1$ partes, dobrando a diagonal $LB$ do retângulo $JBCL$, encontrando o novo ponto $I$ na intersecção das diagonais, e dobrando um novo segmento $J'L'$ perpendicular a $AB$ passando por $I$. Então $\overline{J'B} = \frac{1}{n}\overline{AB}$.

# Capítulo 2

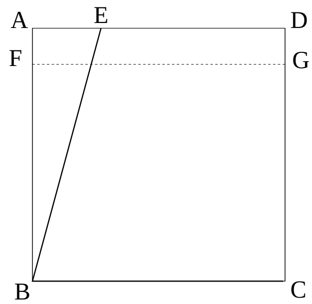
# Trissecção do Ângulo

Um dos famosos problemas da antiga Grécia era a trissecção de um ângulo qualquer com régua e compasso. Esse problema é impossível com régua e compasso, mas é solúvel com *Origami*. A construção dada a seguir é creditado a Hisashi Abe, conforme publicado em 1980 no Japão.

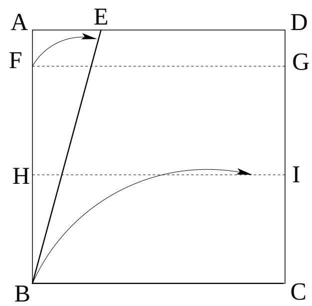
*Seja um ângulo $\angle EBC$ menor que $90^o$ conforme figura.*
Para casos de ângulos obtusos, basta aplicar apenas no ângulo excedente a $90^o$ e somá-lo à trissecção do restante.



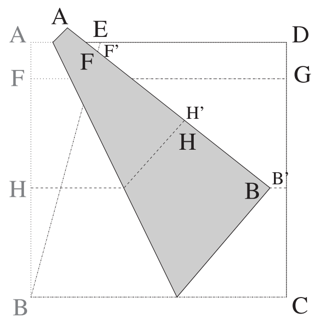
*Determine uma paralela $FG$ a $AD$.* Se a construção seguinte não couber no papel, escolha outra paralela mais convenientemente posicionada, ou use papel maior (ainda com vértice $B$ na quina do papel).




*Determine uma paralela $HI$, onde $H$ e $I$ são os respectivos pontos médios de $FB$ e $GC$.*
*Dobre de modo a levar o ponto $F$ ao segmento $EB$ e o ponto $B$ ao segmento $HI$.*
Esta última dobra é dada pelo Axioma 6 de Huzita.

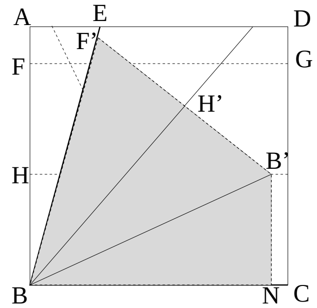



*Para uma melhor visualização, marque os pontos $H'$, $F'$ e $B'$ (onde foram $H$, $F$ e $B$), sobre o papel, e trace o segmento $F'B'$.*



*Abra novamente e trace os segmentos $B'B$ e $H'B$. Trace por $B'$ uma paralela a $HB$, com extremidade $N$.*

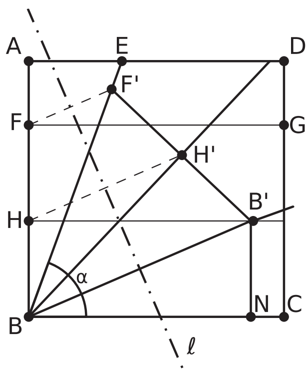
Temos que os triângulos $\triangle BB'N$, $\triangle BB'H'$ e $\triangle BF'H'$ são congruentes, com os ângulos em $B$ congruentes.




De fato:

Os triângulos $\triangle BB'N$ e $\triangle BB'H'$ são congruentes, pois possuem a hipotenusa $BB'$ em comum e os catetos opostos aos ângulos no vértice $B$ são congruentes, já que $\overline{NB'} = \overline{BH} = \overline{B'H'}$.

Os triângulos $\triangle BB'H'$ e $\triangle BF'H'$ são congruentes, pois possuem um cateto $BH'$ em comum e os catetos opostos aos ângulos no vértice $B$ são congruentes, pois $\overline{H'B'} = \overline{HB} = \overline{HF} = \overline{H'F'}$.



Com isso, o vértice dos triângulos que estão em $B$ têm os mesmos ângulos, assim, $\angle EBC$ está divido em três partes congruentes.

O passo que não pode ser realizado com régua e compasso é o passo do Axioma 6 de Huzita.

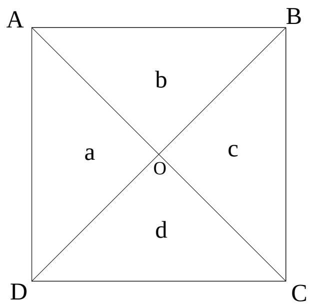
# Capítulo 3

# Quadrados e Áreas

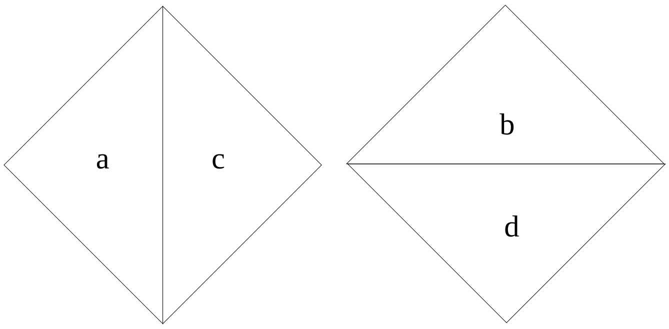
## 3.1 Proporção $\frac{1}{2}$ da Área

Um problema que simplesmente podemos obter com régua e compasso e de fácil aplicação em *Origami*, com ajuda de uma tesoura, é como obter um quadrado com a metade da área de um quadrado inicial.

*Seja um quadrado ABCD. Junte os vértices $A$ e $C$ para obter o segmento $BD$. Analogamente, obtenha o segmento $AC$.*
É fácil ver que os ângulos juntos ao centro são retos.

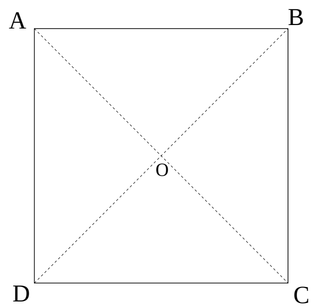


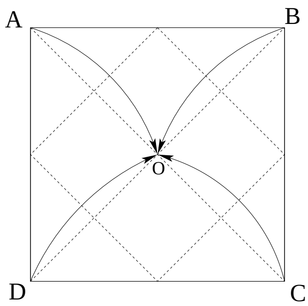
Recortando os triângulos obtidos e juntando-os dois a dois como na figura abaixo, teremos dois quadrados, cada um com a metade da área do quadrado $ABCD$ inicial.

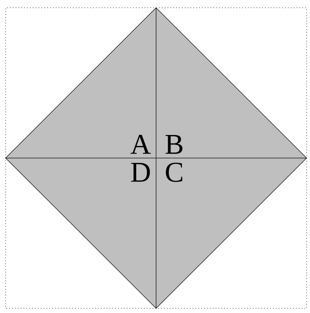



É possível obter esse mesmo resultado de outras formas.

*Seja dado um quadrado ABCD.*
*Leve todos os vértices ao centro do quadrado, ou seja, no encontro das duas diagonais.*
O quadrado resultante tem a metade da área do quadrado original.



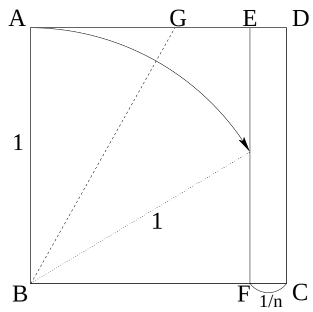



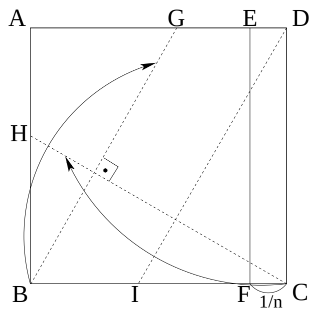
## 3.2 Proporção $\dfrac{1}{n}$ da Área

Vimos no capítulo anterior uma forma de se dividir um segmento em $n$ lados, obtendo assim, a proporção de $\dfrac{1}{n}$. Na primeira parte deste capítulo, vimos como obter um quadrado com a metade da área de um quadrado dado. Veremos agora como obter um quadrado de área $\dfrac{1}{n}$ da área original.

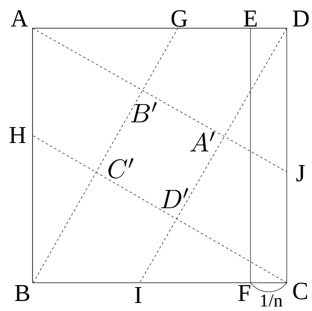
*Iniciando com um quadrado $ABCD$, dobre o lado na proporção $\dfrac{1}{n}$ que desejar. Marque os pontos $E$ e $F$, conforme figura.*
*Fixando $B$, leve o vértice $A$ ao segmento $EF$, rotacionando por um eixo $BG$.*



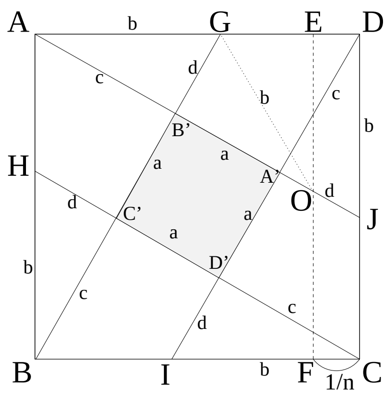

*Fixe $C$ e leve $B$ sobre $BG$, obtendo o eixo $HC$ ($HC \perp BG$).*
*Repita o procedimento nos outros vértices.*
Note que os eixos de rotação são ortogonais, pois o vértice é levado ao eixo que o contém.



Os eixos formarão um quadrado. Esse quadrado $A'B'C'D'$ está para $ABCD$, assim como $\dfrac{1}{n}$ está para 1. Em outras palavras, a área de $ABCD$ dividido por $n$ é igual a área de $A'B'C'D'$.

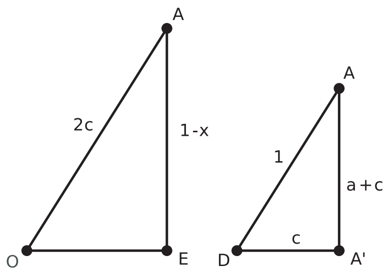



Para demonstrar a proporção entre as áreas de $A'B'C'D'$ e $ABCD$, vamos analisar as relações entre os segmentos construídos, nomeando os elementos conforme a figura:




Supondo que $ABCD$ tem lado 1 e que $x = \dfrac{1}{n}$, basta mostrar que $a^2 = x$, onde $a$ é o lado do quadrado $A'B'C'D'$.

Temos que $\overline{AB'} = \overline{B'O} = c$ por construção e que os triângulos $\triangle AA'D$ e $\triangle AEO$ são semelhantes, por serem retângulos e possuírem o mesmo ângulo em $A$.
Da semelhança,




$$\frac{1-x}{2c} = \frac{a+c}{1},$$

donde $a + c = \dfrac{1-x}{2c}$.

Além disso, no $\triangle AA'D$, temos que $(a+c)^2 + c^2 = 1$.

Mas $(a+c)^2+c^2 = a^2+2ac+2c^2 = a^2+2c(a+c) = a^2+2c\,\dfrac{1-x}{2c} = a^2 + 1 - x$.

Logo $a^2 + 1 - x = 1$, donde $a^2 = x = \dfrac{1}{n}$.

Conclui-se então que a área do quadrado $A'B'C'D'$ é $\dfrac{1}{n}$ da área do quadrado $ABCD$.

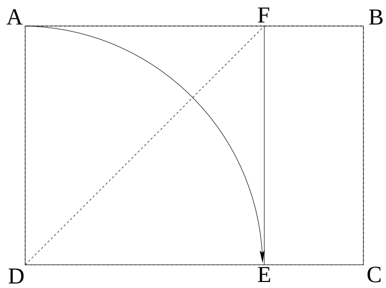
*Observação*: $n$ não precisa ser número inteiro.

# Capítulo 4

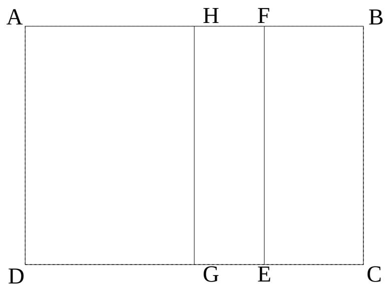
# Quadratura do Retângulo

Dado um retângulo $ABCD$, o problema consiste em transformá-lo num quadrado de mesma área.

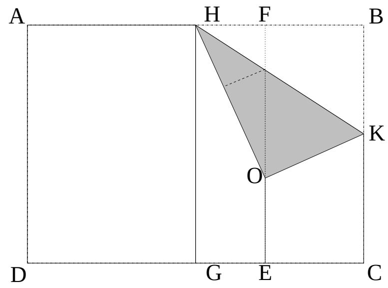
*Construa o quadrado $AFED$ como na figura.*




*Dobre o segmento $HG$, onde $H$ e $G$ são os pontos médios de $AB$ e $DC$.*

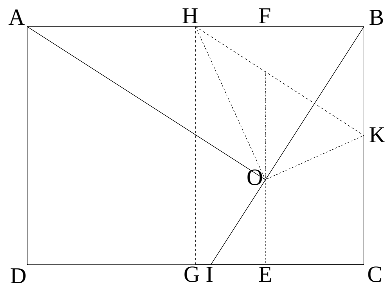


*Com o ponto $H$ fixo, leve o vértice $B$ ao segmento $EF$, encontrando o ponto $O$ no segmento $EF$, e $K$ no segmento $BC$.*

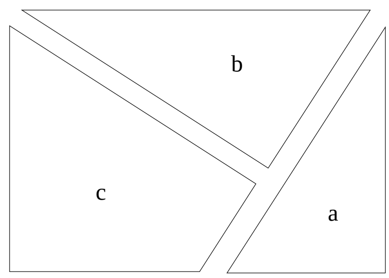



Os triângulos $\triangle HKB$ e $\triangle HKO$ são congruentes.

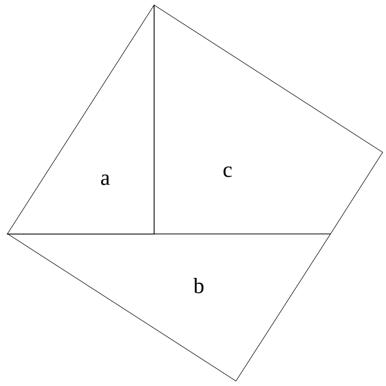
*Prolongue $BO$ até encontrar $DC$ no ponto $I$.*
*Recorte pelos segmentos $OA$ e $BI$.*




*Nomeie as peças como $a$, $b$ e $c$, conforme a figura.*



*Reorganize as peças de modo a obter um quadrado de mesma área do retângulo ABCD.*




Mas será que realmente obteremos um quadrado perfeito?

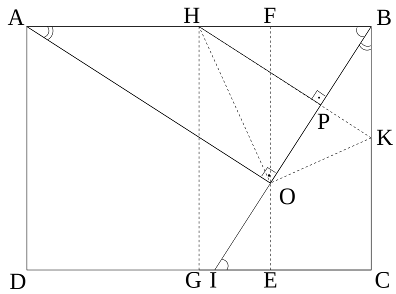
Provavelmente, devido algumas imprecisões nas dobras o resultado pode ser duvidoso. Verificaremos então, os segmentos e ângulos obtidos:

Vimos que $\triangle HOK \cong \triangle HBK$, já que são refletidos em relação a $HK$.

Temos que $BO$ é perpendicular a $HK$ pela construção. Se $P = BO \cap HK$, o ângulo $\angle HBP$ é congruente ao ângulo $\angle ABO$.

Como $H$ é ponto médio de $AB$ e $P$ é ponto médio de $OB$, temos então que o triângulo $\triangle ABO$ é semelhante ao triângulo $\triangle HBP$, na razão de $\dfrac{2}{1}$.

Logo, podemos concluir que $AO$ é perpendicular a $OB$. Provado isto, podemos concluir que os outros ângulos que formarão os vértices do quadrado serão complementares, assim, concluímos que os ângulos satisfazem os ângulos de um quadrado (ou de um retângulo).

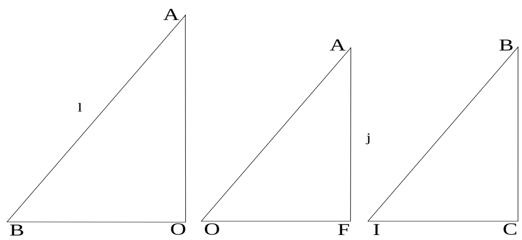



Resta provar se $\overline{BI} = \overline{AO} =$ lado do quadrado. Vamos chamar de $j$ o lado menor e $l$ o lado maior do retângulo. Por serem retângulos e um ângulo em comum, os triângulos $\triangle AOB$, $\triangle ICB$ e $\triangle AFO$ são semelhantes.

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}}$$

$$\frac{j}{\overline{AO}} = \frac{\overline{AO}}{l}$$

$$\overline{AO} = \sqrt{j \cdot l}$$




Precisamos averiguar o valor de $\overline{BI}$, outro lado do quadrado:

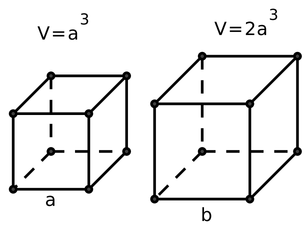
$$\frac{\overline{BI}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AO}} \Longrightarrow \frac{\overline{BI}}{l} = \frac{j}{\sqrt{j \cdot l}} \Longrightarrow \overline{BI} = \frac{j \cdot l}{\sqrt{j \cdot l}} \Longrightarrow \overline{BI} = \sqrt{j \cdot l}\,.$$

A área do retângulo de lados $j$ e $l$ é dado por $j \cdot l$; a área do quadrado, de lado $\sqrt{j \cdot l}$, também é $j \cdot l$. Portanto, está satisfeita a quadratura do retângulo.

# Capítulo 5

# Duplicação do Cubo

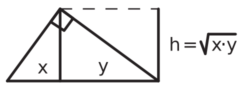
**Problema:** *"Dado um cubo de aresta a, obter a aresta b de um cubo com o dobro do volume."*



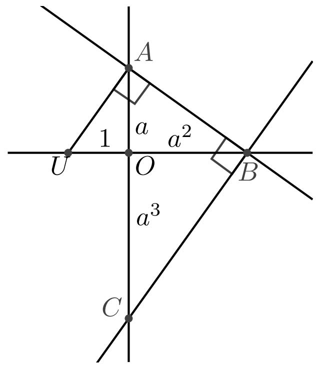

Este é mais um dos três problemas clássicos de Euclides. Mais uma vez, possível com *Origami* e impossível com régua e compasso.

Primeiro, podemos obter o volume $a^3$ do cubo de aresta $a$ na seguinte construção:

Considere $\overline{OU} = 1$ e $\overline{OA} = a$.
Usando a propriedade



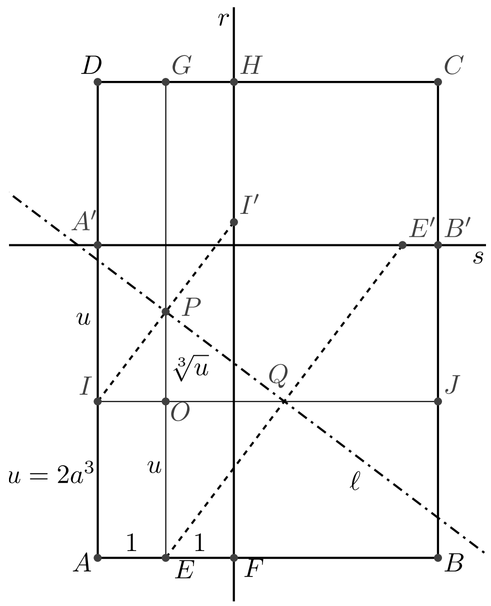

temos que
$\overline{OB} = a^2$ e $\overline{OC} = a^3$.
Exercício: construa $a^4$.




Tendo $a^3$, vamos construir $b = \sqrt[3]{2a^3}$.

Para isso, tendo obtido $u = 2a^3$ e considere um retângulo $ABCD$ suficientemente grande para a construção seguinte:

*Em $AB$ marque $E$ e $F$ com $\overline{AE} = 1$ e $\overline{AF} = 2$. Marque $EG$ e $FH$.*
*Em $AD$ obtenha $I$ e $A'$ com $\overline{AI} = u = \overline{IA'}$.*
*Marque $IJ$ e $A'B'$.*
*Seja $O = IJ \cap EG$.*
*(*) Dobre levando $I$ sobre $r = FH$ e $E$ sobre $s = A'B'$, obtendo $\ell$.*
(**) $\ell$ determina em $EG$ o ponto $P$ e $\overline{OP} = \sqrt[3]{u}$.



(*) Esta dobra é do mesmo tipo utilizado na trissecção do ângulo, dado pelo Axioma 6 de Hizuta.

(**) Como $\ell$ é a mediatriz de $II'$ e passa por $P$ de $EG$, temos a mesma situação da figura anterior, onde os ângulos $I\widehat{P}Q$ e $P\widehat{Q}E$ são retos e, portanto, $u = \overline{OE} = \left(\overline{OP}\right)^3$, donde segue o resultado.

## Capítulo 6

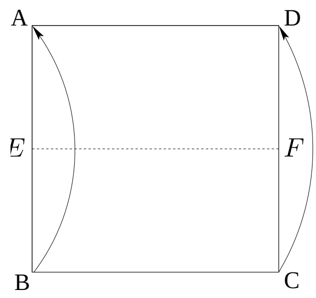
# Pentágono e Retângulo Áureo

Neste capítulo será feito uma das construções de um pentágono regular. Existem outras formas de se obtê-lo, como veremos mais tarde. A propriedade explorada nesta construção é que o lado do pentágono é o segmento áureo da diagonal. Como subproduto, podemos construir o retângulo áureo.

Lembramos que retângulo áureo de lados $a$ e $b$ segue a proporção $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b-a}{a}$ $(a < b)$, donde $a^2 = b^2 - ab$ e, portanto, $a = \dfrac{b\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$.

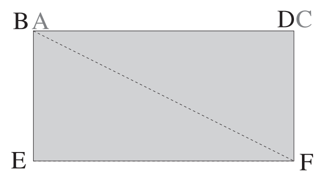
Para $b = 2$ e $a = \sqrt{5} - 1$.

*Considere um quadrado $ABCD$ de lado 2.*
*Observação*: Esta medida é para simplificar a demonstração.
*Junte os vértices $A$ com $B$ e $D$ com $C$, obtendo assim um retângulo de $2 \times 1$ e o lado $EF$.*

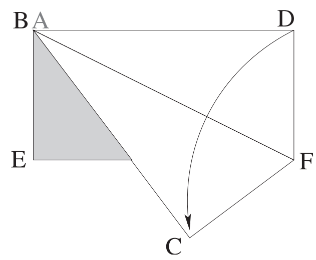



*No retângulo $BEFD$ escolha uma diagonal, digamos, $BF$.*
Pelo Teorema de Pitágoras,

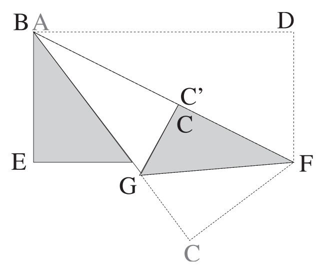
$$\overline{BF}^2 = 2^2 + 1^2 \Longrightarrow \overline{BF} = \sqrt{5}\,.$$




*Usando a diagonal como eixo de rotação, dobre o vértice $C$ para fora.*



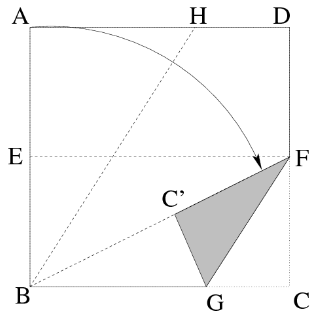

*Fixando $F$, leve o ponto $C$ ao segmento $BF$ e marque o ponto $C'$.*



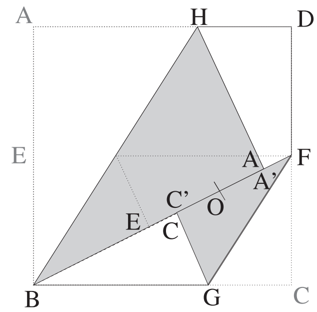
Temos que $\overline{CF}$ é igual a 1, pois assumimos que o lado do quadrado é 2. Assim, $\overline{BF} - \overline{CF}$ é igual a $\sqrt{5} - 1$, ou seja, $\overline{BC'} = \sqrt{5} - 1$.

Observe que $\overline{BC'}$ é o *segmento áureo* do lado (2).

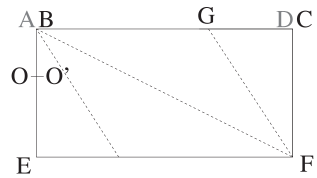
*Voltando para o quadrado inicial, fixe $B$ e leve o vértice $A$ até $BF$.*



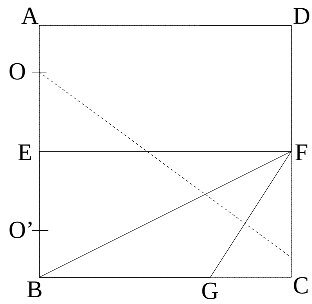

*Subtraia $\overline{BC'} = \sqrt{5} - 1$ do lado $\overline{AB} = 2$; o resto, ou seja, $CA'$, divida ao meio no ponto $O$.*



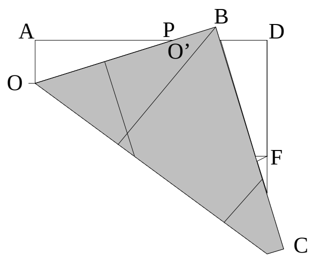

*Com a mesma distância de $AO$, a partir de $B$, marque $O'$.*



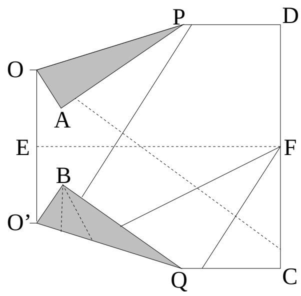
Temos então que o segmento $OO'$ tem comprimento igual a $\overline{BC'} = \sqrt{5}-1$, podendo ser um dos lados do pentágono.



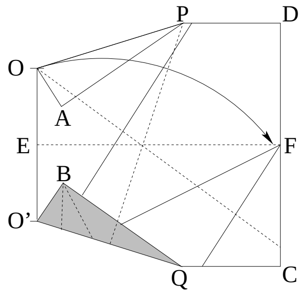

*Fixando $O$, leve o ponto $O'$ até $AD$. Marque como $P$ o ponto onde $O'$ toca $AD$.*




*Analogamente, marque como $Q$ o ponto onde $O$ encontra $BC$.*
*Dobre por $OP$ e $O'Q$.*



*Fixando $P$, leve $O$ ao segmento $EF$.* Note que a dobra faz-se em torno do eixo dos pontos $P$ e o ponto médio de $O'Q$.




Neste momento, vamos analisar alguns resultados.

Temos que os pontos $O'$ e $Q$ são simétricos a $O$ e $P$ em relação a $EF$, por construção. Além disso, $\overline{OO'} = \sqrt{5} - 1$ e $\overline{AO} = \overline{BO'} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

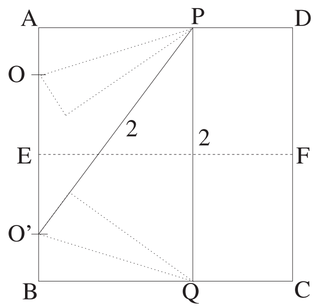
Por Pitágoras,

$$\overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 = \overline{OP}^2,$$

donde

$$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \overline{AP}^{\,2} = \left(\sqrt{5}-1\right)^2$$

e portanto, $\overline{AP}^{\,2} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$.




Temos ainda que $\overline{AP}^2 + \overline{AO'}^2 = \overline{O'P}^2$, lembrando que $\overline{AO} = \overline{AO'} + \overline{OO'}$.

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \overline{O'P}^2$$

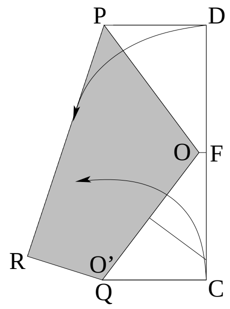
$$\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} = \overline{O'P}^2$$

$$\overline{O'P}^2 = 4 \Rightarrow \overline{O'P} = 2$$

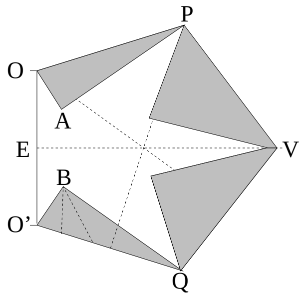
$$\overline{O'P} = \overline{PQ} = 2 \text{ (lado do quadrado)}$$

Com isso, temos que $\triangle O'PQ$ é um triângulo isósceles e por isso, se $R$ é o ponto médio de $O'Q$, então $PR \perp O'Q$. A reflexão do quadrilátero $OPRO'$ em torno do eixo $PR$, determina $V$, exatamente sobre $EF$.

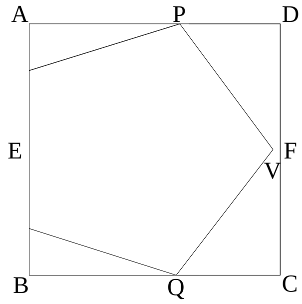
*Continuando, leve os vértices $D$ e $C$ sobre o quadrilátero $OPRO'$.*




*Volte apenas a dobra efetuada sobre o eixo $PR$, obtendo assim um pentágono regular.*



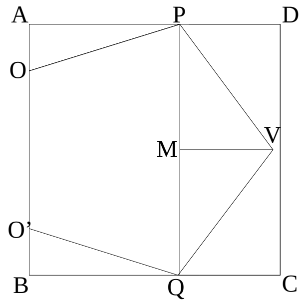
O pentágono é mesmo regular? Inicialmente supomos o lado do quadrado igual a 2. Encontramos o segmento $\sqrt{5}-1$ e o utilizamos como lado do pentágono. Vimos que o vértice $V$ foi obtido através da reflexão do quadrilátero $OPRO'$.



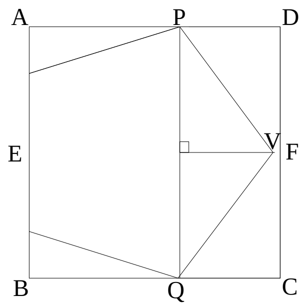

Vimos também, em passos da construção do pentágono, que os pontos $P$ e $Q$ são os vértices do pentágono, e, pela construção,

$$\overline{OP} = \overline{O'P} = \overline{OO'} = \sqrt{5}-1 \quad \text{e}$$

$$\overline{PQ} = \overline{O'P} = 2.$$

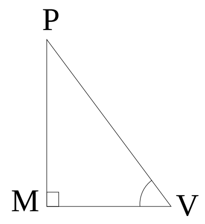



O triângulo $\triangle PVQ$ é isósceles e congruente ao $POO'$, assim, traçando uma perpendicular a $PQ$ e passando por $F$, temos que $MF$, conforme figura, é bissetriz do $\angle PVQ = 2\alpha$ e divide $PQ$ ao meio.
*Observação*: $V \neq F$.



Temos que $\overline{PM} = 1$, $\overline{PV} = \sqrt{5} - 1$. Então

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}-1} \Rightarrow \alpha = 54^{o}.$$

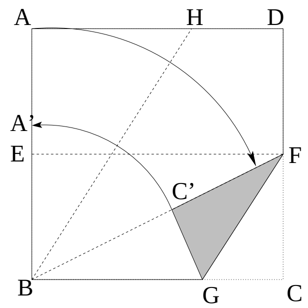



Logo, $\measuredangle PFQ = 108^{o}$, que corresponde ao ângulo interno de um pentágono.

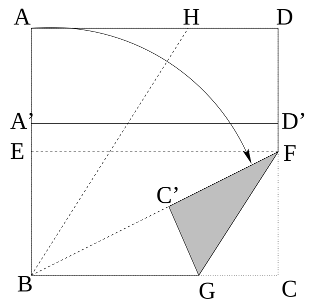
A demonstração dos outros ângulos fica por conta do leitor.

Se quando obtivemos o segmento áureo $BC'$ do lado (2), transferíssemos a medida a um dos lados do quadrado a partir de um dos vértices, teríamos então o retângulo áureo. Voltemos então à construção:

*Fixe $B$ e leve o vértice $A$ até $BF$.*
O ponto (chamemos de $A'$) do lado $BA$ que é levado em $C'$ é tal que $BA'$ é o segmento áureo do lado.




*Por $A'$ trace uma perpendicular ao lado $AB$.*



Está pronto o retângulo áureo $A'BCD'$.

# Capítulo 7

# Poliedros de Platão de Faces Triangulares

Entre os cinco poliedros convexos regulares, conhecidos como Poliedros de Platão, três deles são constituídos de faces triangulares: tetraedro, octaedro e icosaedro.

Neste capítulo construímos as unidades básicas (ou módulos) que se encaixam de formas distintas, formando os poliedros de faces triangulares acima.

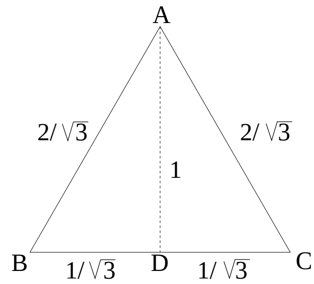
Para isso, vamos abordar algumas construções preliminares.

## 7.1 Retângulos $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ e $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

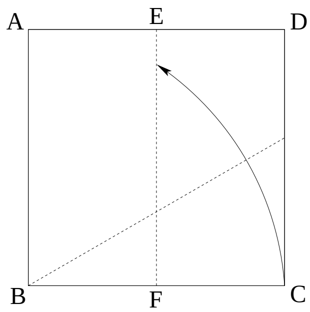
A construção das unidades básicas passa por preparação de retângulos de proporções especiais.

Vamos trabalhar inicialmente com a relação $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ e $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ sobre os lados do retângulo.

Essas medidas aparecem naturalmente no triângulo equilátero.

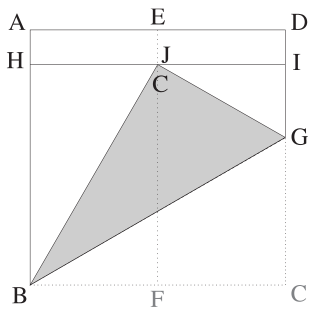



*Seja um papel quadrado $ABCD$ de lado 1.*
*Encontre $EF$, onde $E$ e $F$ são pontos médios de $AD$ e $BC$, respectivamente.*
*Fixando $B$, leve $C$ a $EF$.*




*Pelo ponto $J$ obtido em $EF$, dobre a perpendicular $HI$ a $EF$.*
Teremos, para o segmento $HB$ que:

$$\overline{HB}^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1^2 \Rightarrow \overline{HB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



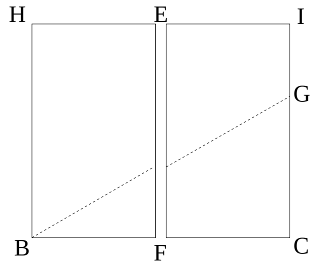

Teremos agora, dois casos.

O primeiro caso, a razão de $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$:

*Corte por $HI$ e $EF$.*

Obteremos duas peças, cujas proporções dos lados são de $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ em cada peça.

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{IC}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

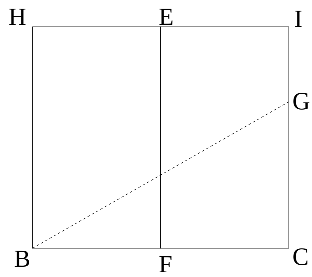



No segundo caso a razão $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$:

*Corte somente por $HI$.*

Sem cortar por $EF$, teremos um retângulo com a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{HB}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

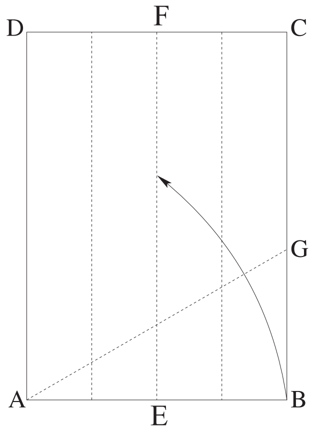



Lembramos que o papel A4 de lados $a$ e $b$ ($a > b$) é tal que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a/2}$, ou seja, dobrando pelo lado maior, temos dois retângulos com a mesma proporção do original. Logo $\dfrac{a^2}{2} = b^2$, donde $a = b\sqrt{2}$, isto é, o lado maior é a diagonal do quadrado de aresta igual ao lado menor. É interessante, mas não é a proporção que queremos para os nossos módulos.

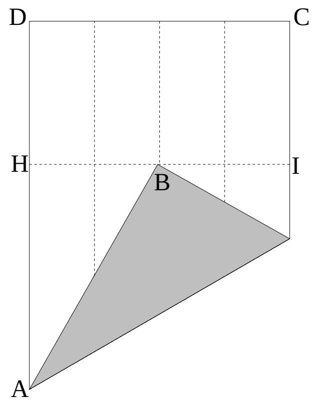
Mas podemos obter do papel A4 doze unidades com a proporção $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, com uma perda muito pequena. Isto facilitará na construção dos poliedros.

*Seja um papel A4 com os vértices $ABCD$. Dobre pelo lado maior ao meio e depois ao meio novamente, obtendo assim, três vincos, dividindo o papel em 4 partes iguais.*


*Fixando $A$, leve o vértice $B$ até o segmento $EF$ feito pelo vinco central, rotacionando em torno do eixo $AG$.*



*Pelo ponto obtido em $EF$ marque o segmento $HI$ perpendicular a $AD$.*

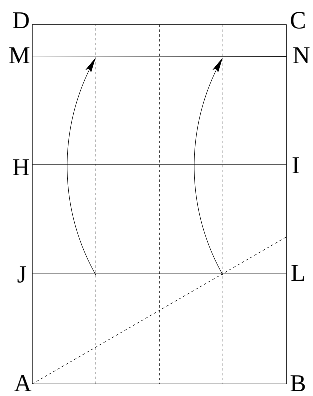



Pelo que vimos anteriormente, a altura $\overline{AH}$ equivale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ se considerarmos $\overline{AB} = 1$, isto é,

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

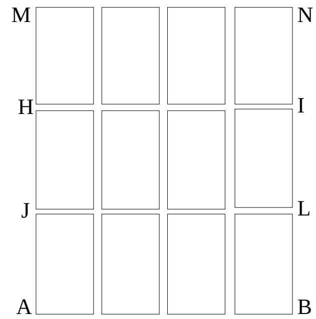
Dividindo $\overline{AH}$ por 2 e $\overline{AB}$ por 4, temos

$$\frac{\frac{\overline{HA}}{2}}{\frac{\overline{AB}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{1}.$$




Para aproveitar o papel, *dobre a proporção obtida usando como eixo $HI$, conseguindo mais quatro peças com razão* $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

O resultado é a obtenção de 12 peças com a razão de $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

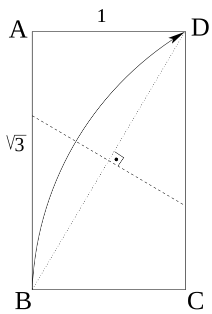



## 7.2 Construção das Unidades

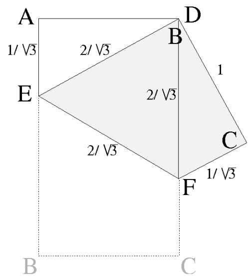
Construiremos agora os módulos, que chamaremos de "unidades" A e B dos poliedros de faces triangulares. Para isto, será necessário a utilização de retângulos de proporção $\frac{1}{\sqrt{3}}$, como as 12 peças obtidas do papel A4, visto anteriormente. Estas unidades formam triângulos equiláteros, que ao se encaixarem, produzirão os poliedros.

### 7.2.1 Unidade A

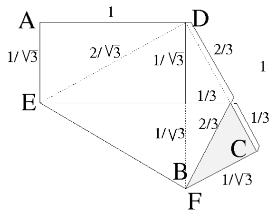
*Com uma peça retangular $ABCD$, respeitando as proporções, leve o vértice $B$ ao $D$.*



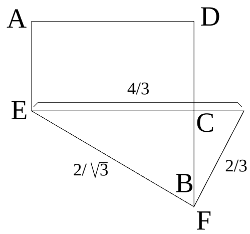
Ao levar $B$ a $D$, surge um eixo de rotação $EF$.
$EF$ é a mediatriz de $BD$.
Os $\triangle EFD$ e $\triangle EFB$ são equiláteros de lado $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.



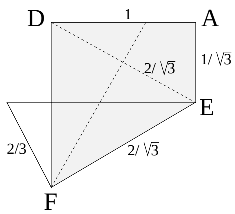

*Leve o vértice $B$ ao ponto $F$.*
A nova dobra é paralela a $AD$.



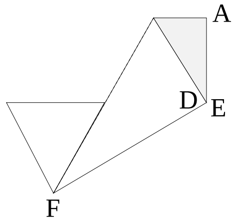

*Leve o vértice $C$ sobre $DF$.*



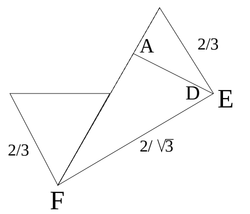

*Vire a peça, de modo que a parte de trás fique para frente.*



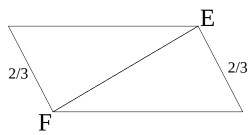
*Leve o vértice $D$ ao ponto $E$.*



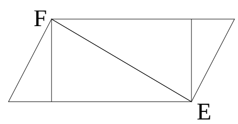

*Mova o vértice $A$ dobrando segundo o eixo do ponto $E$.*



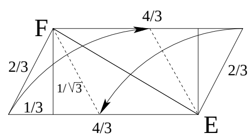

*Desfaça a dobra pelo eixo $EF$, de modo que apareça um paralelogramo.*



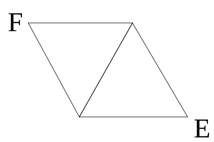

*Vire a peça, de modo que a parte oculta volte-se para frente.*




*Leve as duas extremidades cujos ângulos são agudos sobre o lado oposto, fixando os vértices com ângulos obtusos.*




Obtém-se um losango cujos lados e a diagonal menor medem $\dfrac{2}{3}$.

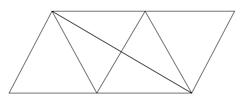


Nas figuras anteriores, temos que a base do paralelogramo é $\dfrac{4}{3}$, ou seja, cabem duas vezes o lado $\dfrac{2}{3}$.

O segmento pertencente à base do paralelogramo e que forma um triângulo retângulo é $\dfrac{1}{3}$ e a altura é $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Esses valores satisfazem as medidas do triângulo equilátero citado no início deste capítulo.

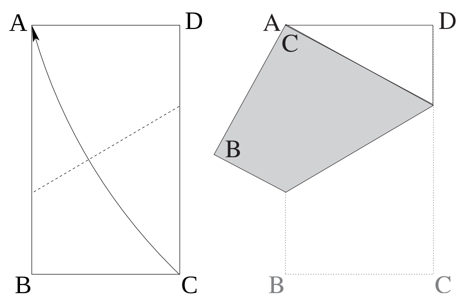
*Abra o losango para obter a unidade A, que é composta por quatro triângulos equiláteros de lado* $\dfrac{2}{3}$.



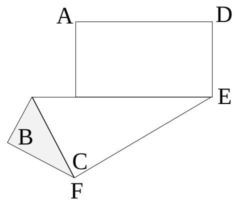
### 7.2.2 Unidade B

A construção segue os mesmos procedimentos da unidade A, com a diferença do lado pelo qual inicia-se a dobra.

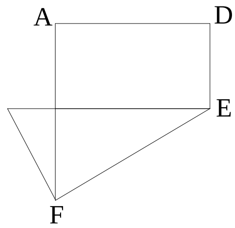
*Com uma peça retangular $ABCD$, respeitando as proporções, leve o vértice $C$ ao $A$.*
O eixo de rotação será chamado de $EF$.



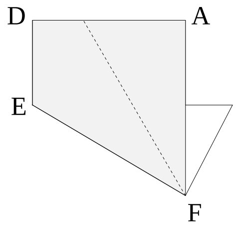
*Leve o vértice $C$ ao ponto $F$.*



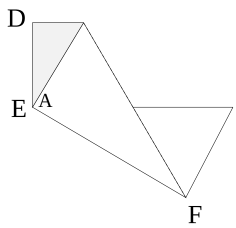

*Leve o vértice $B$ sobre $AF$.*



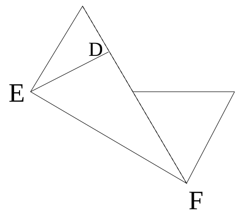

*Vire a peça, de modo que a parte de trás fique para frente.*



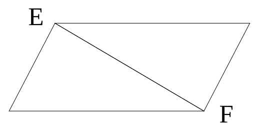

*Leve o vértice $A$ ao ponto $E$.*



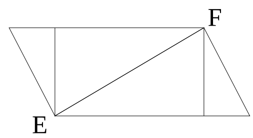
*Pegue o vértice $D$ e dobre pelo eixo do ponto $E$.*



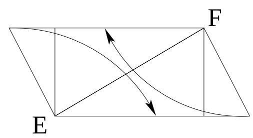

*Desfaça a dobra pelo eixo $EF$, de modo que apareça um paralelogramo.*



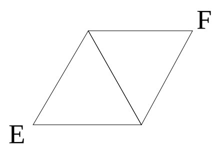

*Vire a peça, de modo que a parte oculta volte-se para frente.*



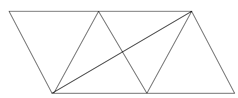

*Leve as duas extremidades cujos ângulos são agudos sobre o lado oposto, fixando os vértices com ângulos obtusos.*




*Obtém-se um losango.*




Abrindo, tem-se a unidade B.

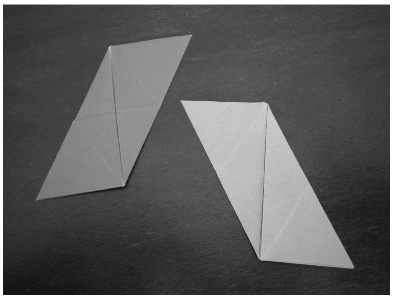


## 7.3 Montagem dos Poliedros

Foram produzidas, nas unidades A e B, faces na forma de triângulos equiláteros. Com os triângulos equiláteros podemos construir apenas três poliedros regulares: o tetraedro, o octaedro e o icosaedro, que são os Poliedros de Platão de faces triangulares.

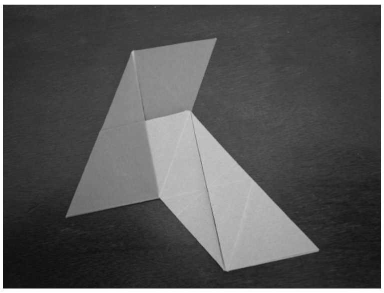
### 7.3.1 Tetraedro

Para a construção do tetraedro são necessários dois módulos, uma unidade A e uma unidade B.

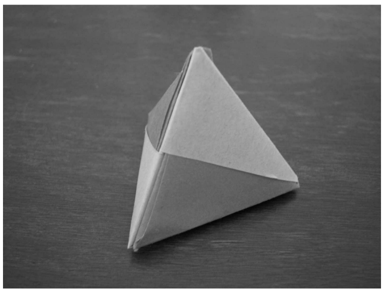


Note que em cada unidade temos quatro triângulos equiláteros e os triângulos das pontas não possuem corte. Os cortes formam aberturas para encaixar os triângulos das pontas e ficarão no lado externo do poliedro.

*Encaixe a unidade A em um dos cortes da unidade B (ou B em A).*

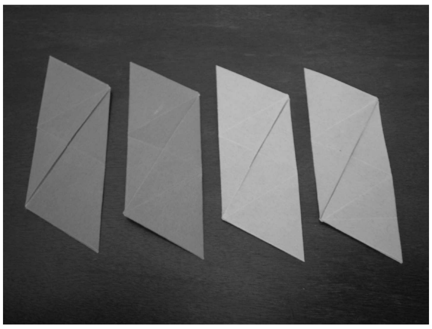


*Dobre dando forma de um tetraedro e encaixando todas as pontas.*
Concluímos o tetraedro.

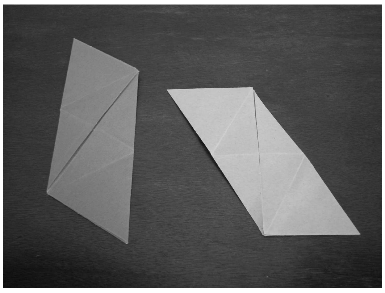


### 7.3.2 Octaedro

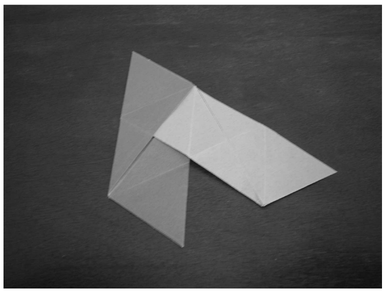
Para a construção do octaedro serão necessários quatro módulos, AAAA ou BBBB ou AABB e, para que fique com faces bicolores, são necessárias duas peças de cada cor.



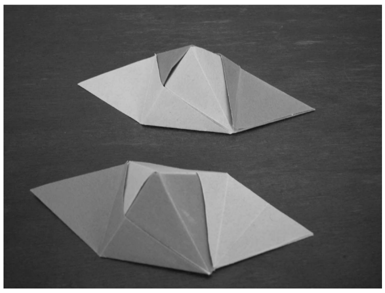
*Tome duas unidades A (ou B), de cores distintas.*



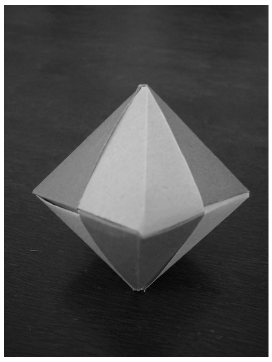
*Encaixe em uma peça A na outra peça conforme a foto.*
*Repita com outras duas peças restantes.*



Forma-se então, duas pirâmides de base quadrada com abas triangulares em lados opostos da base.

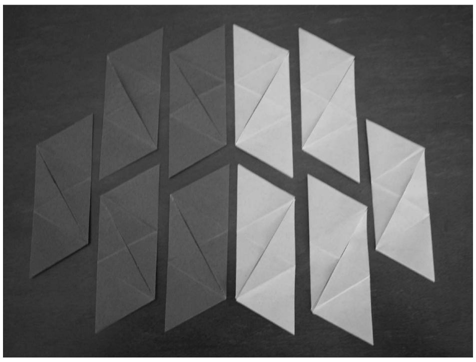


*Encaixe as duas pirâmides para finalizar o octaedro.*

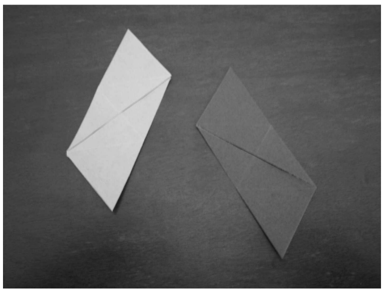


### 7.3.3 Icosaedro

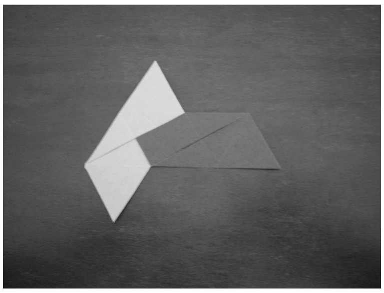
Para a construção do nosso icosaedro bicolor são necessários cinco módulos de cada tipo e cor, ou seja, cinco unidades A com cor 1 e cinco unidades B com cor 2. Teremos uma faixa cilíndrica com dez faces bicolores e fechados com cinco faces de cor 1 de um lado e cinco faces de cor 2 do outro lado. Não é possível obter todas as faces bicolores.



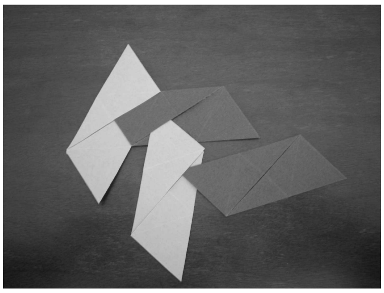
*Inicia-se com duas unidades distintas, A e B.*



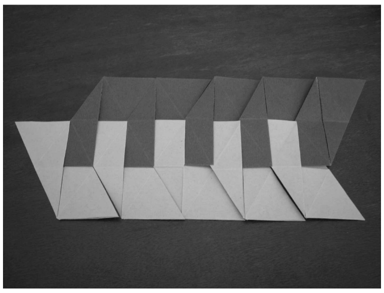
*Encaixe a unidade B na unidade A.*



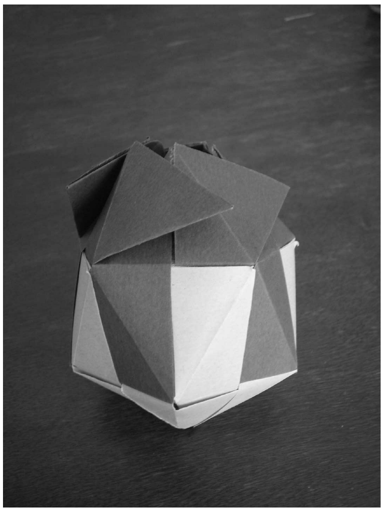
*Repita o procedimento anterior, encaixando a peça A na B, depois a B na A, sucessivamente.*
Para facilitar a montagem, recomenda-se que cole com alguma fita adesiva todos os encaixes na parte interna.



*Encaixadas todas as peças, encaixe a última peça, no caso a peça B, na primeira peça A, dando um formato cilíndrico.*



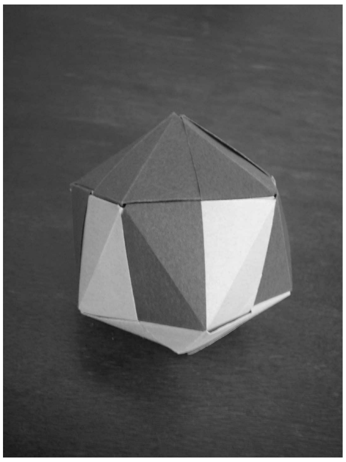
*Com a faixa cilíndrica pronta, concentre-se nas pontas triangulares de um dos lados. Encaixe um triângulo em outro adjacente sucessivamente, até fechar o lado com as cinco faces.*



"arquivo_orig
2010/2/26
page 58
Estilo OBME



*Repita o passo anterior no outro lado do cilindro, finalizando o icosaedro.*



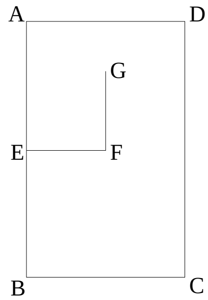
## 7.4 Esqueleto do Icosaedro

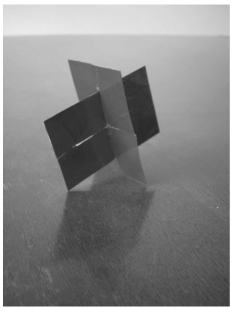
Não podemos deixar de apresentar o esqueleto do icosaedro, constituído de três retângulos áureos encaixantes. Isto porque no icosaedro, cada cinco faces triangulares com um vértice em comum determina um pentágono regular, cuja diagonal é o lado maior do retângulo áureo. O lado menor é uma aresta do icosaedro (do conjunto de cinco faces correspondente a outro vértice).

Já vimos, junto com a construção do primeiro pentágono, a construção do retângulo áureo de lado maior 2, que pode ser usada aqui.

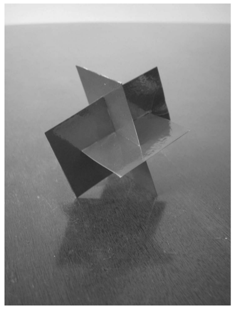
Recortados os retângulos com as devidas proporções, passamos para o seguinte:

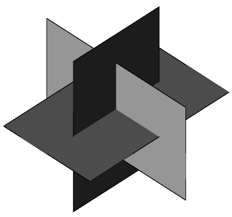
*Seja $E$ = ponto médio de $AB$.*
*Sejam $EF$ e $FG$ como na figura,*
*com* $\overline{EF} = \overline{FG} = \dfrac{\overline{AD}}{2}$
*Recorte por $EF$ e $FG$.*



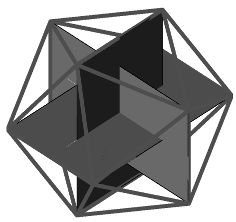



*Encaixe duas peças.*
*Encaixe a terceira peça.*
Está pronto o esqueleto do icosaedro.





Vemos que ligando os vértices da estrutura com segmentos obtemos um icosaedro.



*Se estiver familiarizado com coordenadas cartesianas $\{O, x, y, z\}$ no espaço, encontre os vértices de um icosaedro com centro na origem do espaço, como exercício. Escolha a posição e o tamanho, de forma a facilitar as contas.*

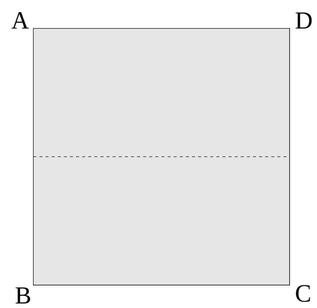
# Capítulo 8

# Poliedro de Platão de Faces Quadradas

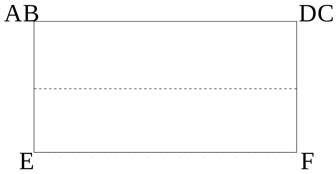
Certamente o único poliedro de face quadrada é o cubo, ou hexaedro regular.

Existem diversas formas de se montar um cubo com *Origami.* Esta foi uma forma utilizada para visualizar bem o seu “esqueleto”, numa montagem de poliedros encaixantes.

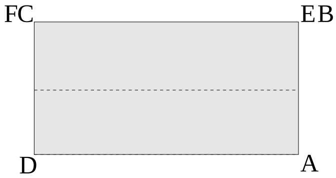
*Comece com um papel quadrado $ABCD$.*
*Leve $B$ e $C$ aos vértices $A$ e $D$ respectivamente.*



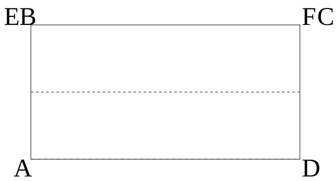
Obtém-se o segmento $EF$.



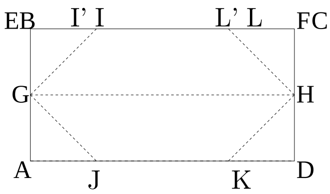

*Dobre de modo que leve $B$ a $E$ e $C$ a $F$, mantendo $A$ e $D$ no lugar. Gire 180°.*



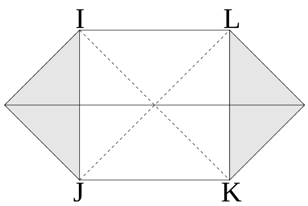

*Vire o papel de modo que a parte opaca fique na frente.*
*Dobre $AD$ sobre $EF$, obtendo o vinco $GH$ e volte.*



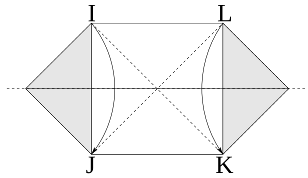

*Leve todos os vértices sobre $GH$, mantendo $G$ e $H$ fixos, obtendo os segmentos $IL$ em $EF$, $I'L'$ em $BC$ e $JK$ em $AD$. A peça resultante forma um feixe de três trapézios em $GH$.*



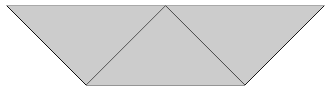

O trapézio $I'L'HG$ está atrás do trapézio $ILHG$ e o quadrilátero $IJKL$ é um quadrado.
*Dobre as diagonais e os lados $IJ$ e $KL$ do quadrado $IJKL$.*



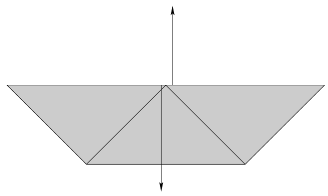
*Leve $JK$ sobre $IL$ e ...*



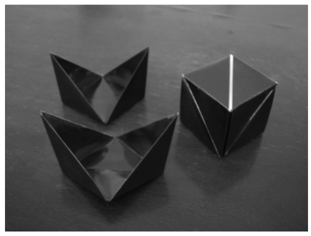

*... e obtenha o trapézio triplo.*



*Abra pelo centro da base maior, como na dobradura de um barco.*



*Abra adequadamente, e faça outra peça igual. Juntando, forme o cubo.*



Duas peças são suficientes se o cubo estiver com um “esqueleto”, que pode ser um octaedro estrelado. Neste caso, deve-se tomar o cuidado de verificar antes qual deve ser a medida da aresta do cubo para envolver o esqueleto. E observe que na construção acima, se $u$ é a aresta do papel quadrado, o cubo tem aresta igual à diagonal do quadrado de aresta $\frac{u}{4}$.

# Capítulo 9

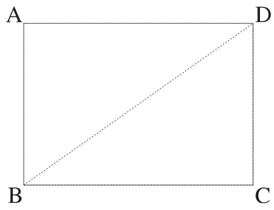
# Poliedro de Platão de Faces Pentagonais

Veremos agora, a construção de um poliedro regular cujas faces são pentágonos. Como o ângulo interno do pentágono é de 108° em cada vértice, não existe a possibilidade de união de mais de três pentágonos, restando assim o dodecaedro como única solução.

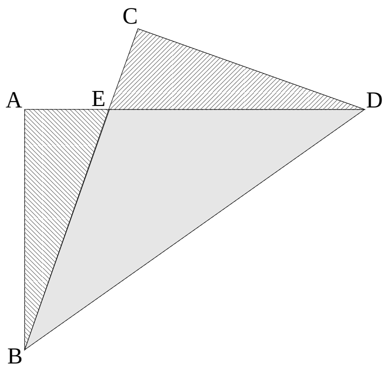
## 9.1 Do copo ao Pentágono Regular

Para a construção do dodecaedro temos que começar com um papel de um tamanho especial, mas antes faremos uma análise em outra construção, a de um copo.

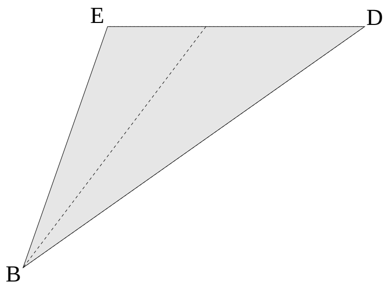
*Começando com um retângulo $ABCD$, dobre a diagonal $BC$.*



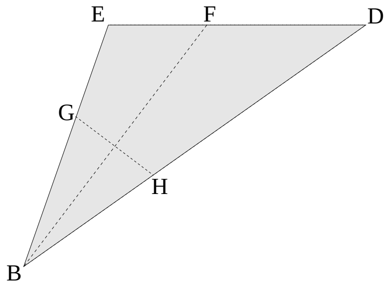

*Encontrando o ponto $E$, intersecção de $AD$ com $BC$, dobre por $EB$ e $ED$, de modo que não prenda a parte oposta.*
Observe que o triângulo $\triangle BED$ é isósceles.



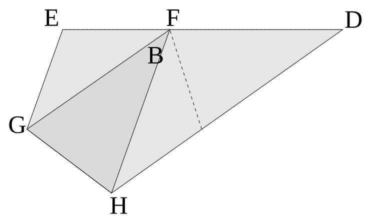

*Dobre agora a bissetriz de $\widehat{B}$.*



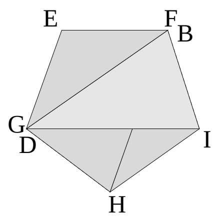
*Encontrado o ponto $F$, intersecção da bissetriz de $\widehat{B}$ com $ED$, dobre a mediatriz de $BF$, donde surge o segmento $GH$, com $G \in EB$ e $H \in BD$.*



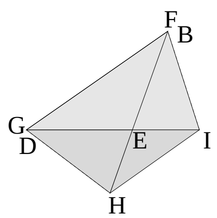

Como $GH$ é mediatriz de $BF$, *dobre levando $B$ a $F$.*



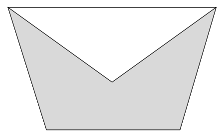

*Seguindo os mesmos procedimentos do vértice $B$, dobre $D$ sobre $G$.*
Um pentágono possivelmente irregular, mas simétrico, está pronto.




*Para terminar o copo, dobre o vértice $E$ pelo eixo de rotação $GF$.*
Note que existem duas folhas, sendo uma dobrada para frente e outra para trás.

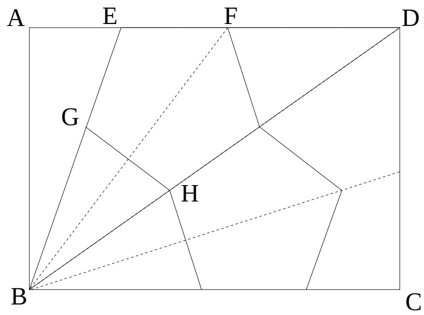


E está pronto o copo.



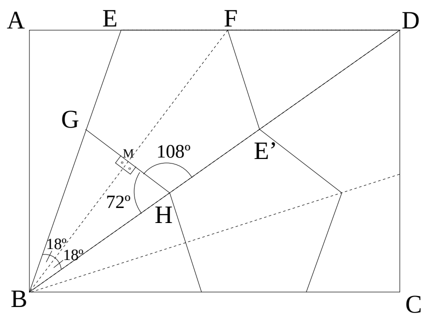
Faremos agora uma análise sobre a construção do copo, para deduzirmos o que é necessário para obtermos um pentágono regular.

Ao desdobrarmos a construção do copo teremos as linhas de dobras.
Pela construção, sabemos que $GH$ é mediatriz de $BF$ e este por sua vez é bissetriz de $E\widehat{B}D$.

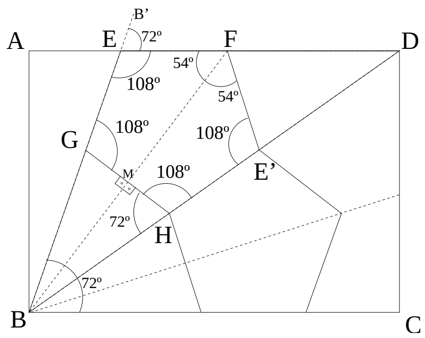



Sabemos que para que o pentágono seja regular, cada ângulo interno deve medir 108º. Como o triângulo $\triangle HBG$ é isósceles, temos que o $E\widehat{G}H$ também mede 108º.

Seja $E' \in BD$ obtido onde $E$ é levado na dobra por $BF$.
Por construção temos que $\overline{EG} = \overline{HE'}$.
Como $BF$ é bissetriz de $E\widehat{B}E'$ e $E$ e $E'$ são equidistantes de $B$, tem-se que $F$ é equidistante de $E$ e $E'$.

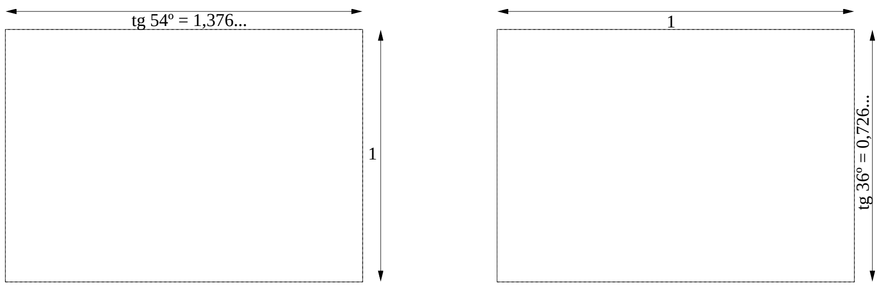


Por Tales, temos que prolongando $BE$, o $B'\widehat{E}D$ é correspondente ao $E\widehat{B}C$, medindo 72º. Pelo triângulo $\triangle EBF$, temos que $\measuredangle EFB = 54^o$, assim como $\measuredangle BFE'$. E finalmente o $\measuredangle FE'B = 108^\circ$, por ser ângulo interno do pentágono.



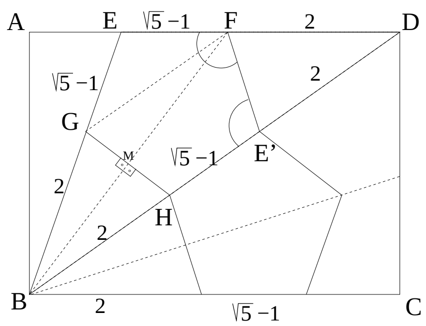

Temos então um pentágono com todos os ângulos de 108º. Resta provar que os lados são congruentes. Por construção, $E'$ e $H$ sendo os refletidos de $E$ e $G$ pela bissetriz $BF$ de $E\widehat{B}D$, os segmentos $GE$ e $HE'$ são congruentes, assim como $EF$ e $FE'$. Na construção, $GD$ também é bissetriz de $A\widehat{D}B$ e os segmentos $EF$ e $HE'$, assim como $EG$ e $GH$ são congruentes.

Ou seja, para obtermos um pentágono regular devemos encontrar um ângulo exato. E esse ângulo exato deve ser o ângulo entre a base (o lado maior) e sua diagonal, devendo ter exatamente 36º, isto é, se o lado maior for equivalente a 1, o lado menor deverá ser igual a $\tan 36^\circ = 0,726....$ Ou então, se o lado menor for equivalente a 1, o lado maior deverá ser igual a $\tan 54^\circ = 1,376....$




Vimos, na primeira construção pentágono regular, que iniciamos com um quadrado de suposto lado 2. Verificamos também que a diagonal desse pentágono mantinha a mesma medida do lado do quadrado inicial e o lado do pentágono media $\sqrt{5}-1$. Observe que aplicando essas medidas na construção do copo, adotando já os devidos ângulos, temos:

$GF$ tem, por construção, mesma medida de $BG$. Como $BG$ é diagonal do pentágono, vamos supor que mede 2. Assim, o lado do pentágono mede $\sqrt{5}-1$ e também pela construção, $\overline{E'D} = 2 = \overline{FD}$.



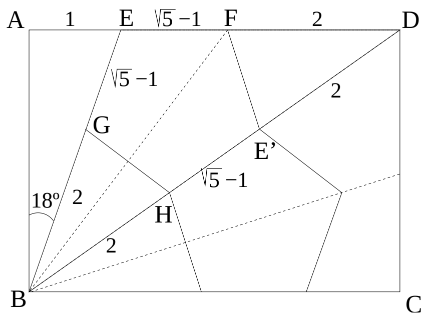

Sabemos portanto a medida do ângulo $C\widehat{B}D$, quanto deve medir a diagonal. Precisamos saber agora, quanto mede um dos lados do retângulo. Para isso, basta saber quanto mede $AE$.

Sabemos que $\measuredangle ABE = 18°$ e que $\overline{BG} = 2$ e $\overline{GE} = \sqrt{5} - 1$. Então:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \text{sen} 18°$$

$$\frac{\overline{AE}}{\sqrt{5}+1} = 0,309...$$

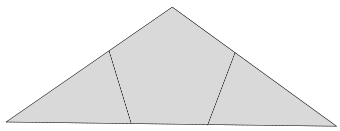
$$\overline{AE} = 1$$



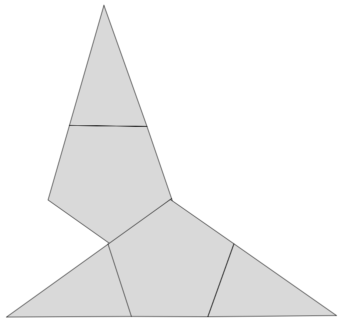

Como construir um retângulo com essas proporções, fixando o tamanho da diagonal 2 do pentágono? Este é um outro problema, que vamos apresentar depois da montagem do dodecaedro.

## 9.2 Dodecaedro

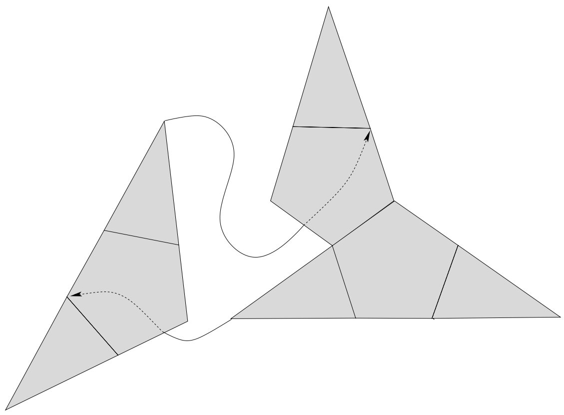
Podemos finalmente montar o dodecaedro. Através da dobradura do copo, iniciado com papel com as medidas especiais, na qual obtém-se os pentágonos regulares, tome a seguinte peça:



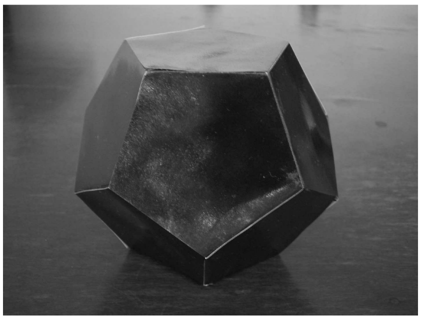
Como o dodecaedro é composto de 12 pentágonos, precisaremos de 12 peças para a construção.



Os triângulos das peças se encaixam em um dos lados do pentágono central da outra peça. É preciso encaixar em uma certa sequência para que fiquem firmes, sem necessidade de utilização de cola ou qualquer outro material adesivo. Na figura abaixo, a linha com a seta indica por onde a ponta da peça deve entrar e até onde ela deve chegar.



Notem que a ponta da peça, que é composta pelos lados congruentes de um triângulo isósceles fazem o papel de duas diagonais do pentágono. E finalmente...

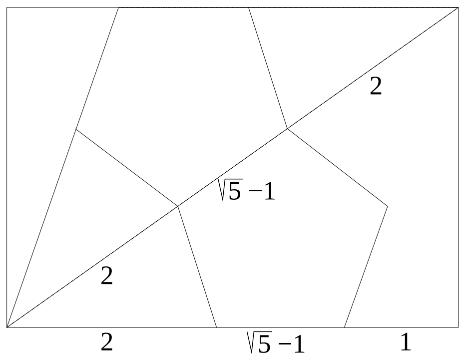


### 9.2.1 Construção do Retângulo para o Dodecaedro de Aresta Dada

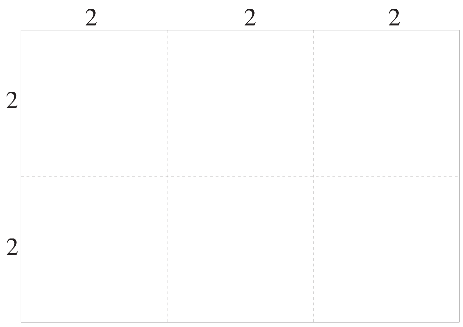
Na construção de poliedros encaixantes aparece o problema de construir os poliedros com medidas predeterminadas. O dodecaedro pode ser construído envolvendo um esqueleto do tipo icosaedro estrelado (icosaedro mais tetraedros em cada face) e isto determina as dimensões do dodecaedro.

Vimos na construção do dodecaedro que são necessários retângulos especiais, cuja diagonal divida o ângulo reto em ângulos de 54º e 36º. Veremos que esses retângulos são construtíveis sem ajuda de um transferidor, e com a *medida desejada* na diagonal do pentágono, que continuará sendo chamada de 2.

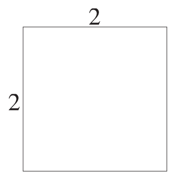
Nosso objetivo será encontrar um retângulo com lado igual a $\sqrt{5}+2$ e diagonal $\sqrt{5}+3$.



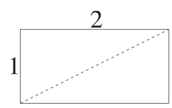

*Comece com um retângulo com as medidas* $6 \times 4$.




*Dobre um quadrado de* $2 \times 2$.



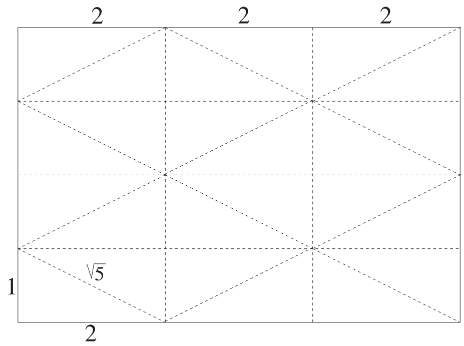

*Depois dobre um retângulo* $2 \times 1$ *e a sua diagonal.*



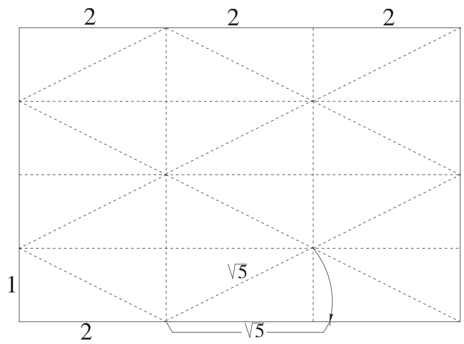

Essa diagonal corresponde a $\sqrt{5}$.

*Abra o papel.*

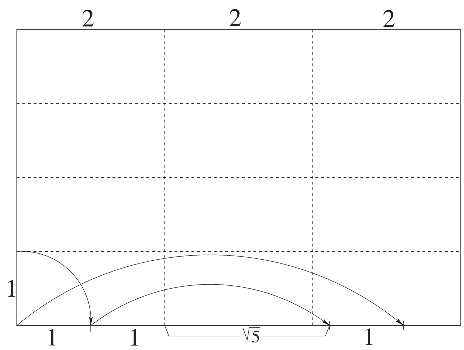
Podemos verificar que cada segmento na horizontal equivale a 2, na vertical 1 e na diagonal $\sqrt{5}$.




*Dobre o segmento* $\sqrt{5}$ *sobre o lado e anote, conforme a figura.*

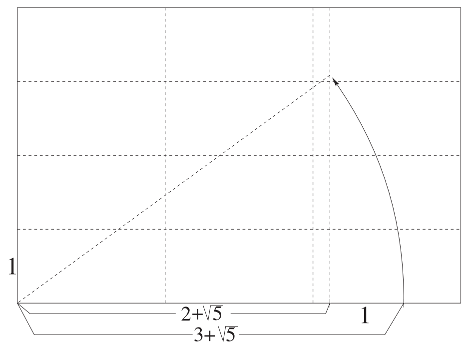



*Dobre o segmento 1 sobre o lado que estamos construindo um dos lados do retângulo e transfira-o somando a* $2 + \sqrt{5}$.

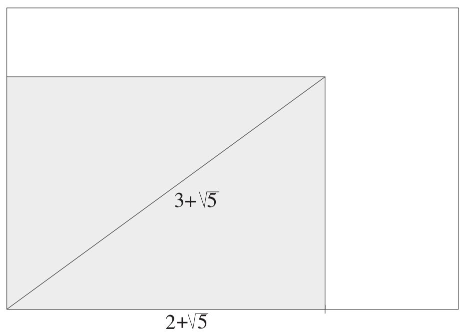


Encontramos os segmentos $2+\sqrt{5}$ e $3+\sqrt{5}$, ou seja, o lado e a diagonal do retângulo, dados suficientes para a construção o retângulo.

*Dobre agora uma perpendicular ao lado* $2+\sqrt{5}$. *Encontre o ponto que dista* $3+\sqrt{5}$ *do vértice e pertence à perpendicular.*



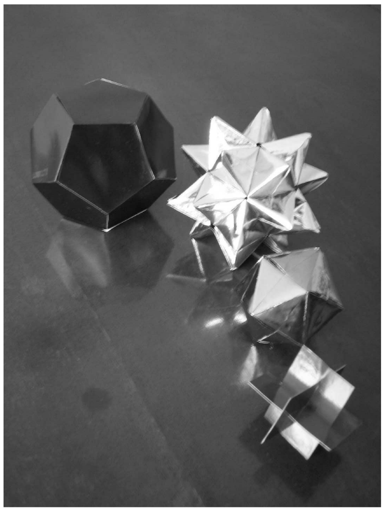

Temos assim um retângulo cujo lado mede $2+\sqrt{5}$ e a diagonal $3+\sqrt{5}$. Basta agora, seguirmos a construção do copo e obtermos as faces do dodecaedro.



# Capítulo 10

# Construções que se Encaixam

Na foto ao lado são apresentadas, de baixo para cima:



- o esqueleto do icosaedro;
- o icosaedro;
- o icosaedro estrelado (icosaedro com uma pirâmide em cada face, que pode ser construída peças especiais de *Origami*, mas não o faremos aqui), que é o esqueleto do dodecaedro;
- o dodecaedro.

Estas peças se encaixam perfeitamente, na ordem acima.

Pode-se construir também com *Origami* outro conjunto de peças encaixantes: esqueleto do octaedro, octaedro, octaedro estrelado e envolvendo todos eles, o cubo.

Observe que esses encaixes são possíveis devido à dualidade entre dodecaedro e icosaedro, e entre cubo e octaedro. A cada face do dodecaedro corresponde um vértice do icosaedro e vice-versa. A cada face do cubo corresponde um vértice do octaedro e vice-versa.

# Palavras Finais

Este trabalho foi baseado em um trabalho de conclusão de curso de Eduardo Cavacami no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos e depois apresentado como Oficina na IV Bienal da SBM, em 2008.

No decorrer do desenvolvimento do trabalho foi observado que muitas pessoas associam *Origami* com dobraduras de animais, flores e outras formas, mas nunca à Geometria. Talvez este seja um dos motivos do pouco uso no ensino. Mas o fato deste tipo de atividade atrair a atenção tanto de crianças quanto de jovens e adultos, faz pensar no método como uma importante opção para o ensino.

Outra contribuição dessa metodologia pode ser na educação de pessoas com problemas de visão, pois com a manipulação envolvida no *Origami*, os elementos geométricos podem ser melhor compreendidos.

Este trabalho é uma pequena parte de um universo que há para ser estudado. Mas o intuito deste trabalho foi mostrar a Matemática escondida em uma simples dobra, mostrando assim, mais um material para o escasso campo do ensino da Matemática.

# Referências Bibliográficas

[1] ABE, Hisashi. *Sugoizô Origami*. Tókio: Nippon Hyoronsha Co. Ltd., 2003.

[2] CAVACAMI, Eduardo. *Aplicações do Origami com recortes como formas de ensino*. Trabalho de Graduação, UFSCar, 2007.

[3] CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda K. S. *Explorando Geometria com Origami*. Oficina apresentada na IV Bienal da SBM, em Maringá, 2008. Disponível em `http://www.dm.ufscar.br/~yolanda/origami/origami2008.pdf`

[4] HULL, Thomas. *Origami Mathematics*. `http://mars.wnec.edu/~th297133/origamimath.html`

[5] KNOTT, Ron. *Some Solid (Three-dimensional) Geometrical Factos about the Golden Section*. Publicado 1996 e atualizado em 2007. `http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/phi3DGeom.html`.

[6] LANG, Robert J. *Origami and Geometric Constructions*. `http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf`.

[7] PEDONE, Nelma M.D. Poliedros de Platão. *Revista do Professor de Matemática*, Rio Grande, n. 15. (CD-Rom com 60 edições da *Revista do Professor de Matemática*.)